

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

William Howard STEEL

1^{re} THÈSE. — Étude des effets combinés des aberrations et d'une obturation centrale de la pupille sur le contraste des images optiques. Application aux objectifs de microscope à miroirs.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 novembre 1952, devant la Commission d'examen.

MM. KASTLER, *Président.*
ARNULF
MARÉCHAL } *Examineurs.*

*Ouvrage publié avec le concours
du Centre National de la Recherche Scientifique*

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1953

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : **STEEL.**

Prénoms : **William Howard.**

Date de la soutenance : 8 novembre 1952.

Numéro d'ordre : série A. 2511 n° 3383.

1

STEEL (William Howard). — Etude des effets combinés des aberrations et d'une obturation centrale de la pupille sur le contraste des images optiques. Application aux objectifs de microscope à miroirs. — Paris, Editions de la Revue d'Optique, 1953, in-8°, 100 p.

Th. Sc. Phys. Paris. 1953. Sér. A. 2511. N° 3383.

2

STEEL (William Howard). — Etude des effets combinés des aberrations et d'une obturation centrale de la pupille sur le contraste des images optiques. Application aux objectifs de microscope à miroirs. — Paris, Editions de la Revue d'Optique, 1953, in-8°, 100 p.

Th. Sc. Phys. Paris. 1953. Sér. A. 2511. N° 3383.

3

STEEL (William Howard). — Etude des effets combinés des aberrations et d'une obturation centrale de la pupille sur le contraste des images optiques. Application aux objectifs de microscope à miroirs. — Paris, Editions de la Revue d'Optique, 1953, in-8°, 100 p.

Th. Sc. Phys. Paris. 1953. Sér. A. 2511. N° 3383.

4

STEEL (William Howard). — Etude des effets combinés des aberrations et d'une obturation centrale de la pupille sur le contraste des images optiques. Application aux objectifs de microscope à miroirs. — Paris, Editions de la Revue d'Optique, 1953, in-8°, 100 p.

Th. Sc. Phys. Paris. 1953. Sér. A. 2511. N° 3383.

SÉRIE A, N° 2511

N° D'ORDRE : 3383

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

William Howard STEEL

1^{re} THÈSE. — Étude des effets combinés des aberrations et d'une obturation centrale de la pupille sur le contraste des images optiques. Application aux objectifs de microscope à miroirs.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 novembre 1952, devant la Commission d'examen.

MM. KASTLER, *Président.*
ARNULF
MARÉCHAL } *Examineurs.*

*Ouvrage publié avec le concours
du Centre National de la Recherche Scientifique*

Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1953

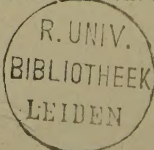
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen. M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA. T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	COULOMB. T	Physique du globe.
A. DENJOY. T	Théorie des Fonctions.	M ^{me} COUSIN. T	Biologie animale (P. C. B.).
L. LUTAUD. T	Géographie physique et Géologie dynamique.	CHABERTIN. T	Chimie minérale.
E. DARMOIS. T	Enseignement de Physique.	P. DRACH. T	Zoologie.
Robert LÉVY. T	Physiologie comparée.	KASTLER. T	Physique.
M ^{me} RAMART-LUCAS. T	Chimie organique.	CHATELET. T	Arithmétique et théorie des nombres.
FOCH. T	Mécanique physique et expérimentale.	EHRUSSEI. T	Génétique.
PAUTHENIER. T	Electrotechnique générale.	WURMSER. T	Biologie physico-chimique.
De BROGLIE. T	Théories physiques.	BAUER. T	Chimie-Physique.
JOB. T	Chimie générale.	RIVIÈRE. T	Géologie (P. C. B.).
PRENANT. T	Anatomie et Histologie comparées.	GAUTHIERET. T	Biologie Végétale (P. C. B.).
COMBES. T	Physiologie végétale.	LUCAS. T	Physique.
GARNIER. T	Géométrie supérieure.	A. THOMAS. T	Evolution des êtres organisés.
PÉRÈS. T	Mécanique des fluides et applications.	ARNULF. T	Optique appliquée.
LAUGIER. T	Physiologie générale.	MAX MORAND. T	Physique.
TOUSSAINT. T	Technique Aeronautique.	SOLEILLET. T	Physique.
M. CURIE. T	Physique (P. C. B.).	FORTIER. T	Mécanique expérimentale des fluides.
G. RIBAUD. T	Hautes températures.	DANJON. T	Astronomie.
CHAZY. T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	FROMAGEOT. T	Chimie biologique.
CROZE. T	Physique théorique et Physique céleste.	LAPORTE. T	Physique générale et Radio-activité.
DUPONT. T	Théories chimiques.	JANET. T	Mathématiques générales.
VALIRON. T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	PETIT. T	Biologie maritime.
BARRABÉ. T	Géologie structurale et géologie appliquée.	QUENY. T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
VAVON. T	Analyse et mesures chimiques.	GALLIEN. T	Biologie animale (P.C.B.).
G. DARMOIS. T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	EICHORN. T	Biologie végétale (P.C.B.).
Jacques BOURCART. T	Géographie physique et Géologie dynamique.	DE CUGNAC. T	Biologie végétale (P.C.B.).
AUBEL. T	Chimie biologique.	M ^{me} CAUCHOIS. T	Chimie-Physique.
M ^{me} JOLIO-CURIE. T	Physique générale et Radio-activité.	THELLIER. T	Physique du Globe.
PLANTEFOL. T	Botanique.	AUDUBERT. T	Electrochimie.
CABANNES. T	Recherches physiques.	L'HÉRITIER. T	Génétique.
GRASSÉ. T	Evolution des êtres organisés.	GRIVET. T	Radio-Électricité.
PRÉVOST. T	Chimie organique.	PONCIN. T	Mécanique des fluides.
BOULIGAND. T	Application de l'analyse à la Géométrie.	THIRY. T	Mécanique appliquée.
CHAUDRON. T	Chimie appliquée.	DUBREIL. T	Mathématiques générales.
WYART. T	Minéralogie.	QUELET. T	Chimie (P. C. B.).
TEISSIER. T	Zoologie.	CAGNIARD. T	Géophysique appliquée.
MANGENOT. T	Biologie végétale.	CHAMPETIER. T	Chimie appliquée.
P. AUGER. T	Physique quantique et relativité.	CUVILLIER. T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
MONNIER. T	Physiologie générale.	JUNG. T	Pétrographie.
PIVETEAU. T	Géologie.	TRILLAT. T	Physique (P.C.B.).
ROCARD. T	Physique.	WIEMANN. T	Chimie (P.C.B.).
H. CARTAN. T	Mathématiques (E. N. Supérieure).	LICHNEROWICZ. T	Mathématiques générales.
SCHAEFFER. T	Physiologie des fonctions.	JACQUINOT. T	Physique (P. C. B.).
LAFFITTE. T	Chimie générale.	VASSY. T	Physique de l'atmosphère.
FAVARD. T	Mécanique générale.	DESTOUCHES. T	Théories Physiques.
		M. PRUVOST. T	Géologie.
		AMIEL. T	Chimie (P. C. B.).
		HOCART. T	Minéralogie.
		MACHEBEUF. T	Microbiologie.
		J. P. MATHIEU. T	Physique (P. C. B.).
		COUTEAUX. T	Biologie animale (P. C. B.).
		MAY. T	Biologie animale (P. C. B.).
		CHOQUET. T	Calcul différentiel.
		FELDMANN. T	Biologie (P. C. B.).
		GUINIER. T	Physique (P. C. B.).
		JOST. T	Biologie (P. C. B.).

Secrétaire. Ch. MONIER.



EFFETS COMBINÉS DES ABERRATIONS ET D'UNE OBTURATION CENTRALE DE LA PUPILLE SUR LES IMAGES

SOMMAIRE. — *Les travaux antérieurs relatifs à l'influence mutuelle de la diffraction et des aberrations n'envisagent le cas où la pupille présente une obturation centrale que pour l'image d'un point. Ce cas se présente dans tous les objectifs à miroirs et nous nous sommes proposé d'étudier ici plus complètement ses effets.*

La première partie est relative à l'étude de la répartition de l'intensité dans l'image fournie par un instrument parfait. L'obturation centrale et les aberrations ont des influences très différentes sur l'image d'un point isolé et il y a lieu d'étudier aussi le cas de divers objets étendus, éclairés en lumière incohérente. On calcule l'intégrale qui exprime le flux lumineux contenu à l'intérieur d'un cercle de rayon variable dans l'image du point, ce qui fournit aussi l'intensité centrale des images des disques circulaires. On calcule ensuite, par des intégrations sur le solide de diffraction, les formes des images de la ligne, du bord de plage et de mires infinies. Cette partie se termine par une étude de l'éclairage cohérent.

Dans la deuxième partie, on fait intervenir les effets des aberrations en utilisant une méthode de calcul approximative dont l'erreur est moindre que deux pour cent pour une aberration égale à sa tolérance. Le cas du point est étudié par les méthodes employées par Maréchal et par Nijboer pour la pupille circulaire, et les résultats permettent de définir les valeurs des aberrations produisant une baisse de contraste de 0,2 en présence d'une pupille annulaire. On obtient deux séries de tolérances correspondant respectivement au point lumineux ou au point noir. Pour décider entre les deux, on calcule l'intensité centrale des mêmes objets étendus en utilisant la transformation de Fourier dans les cas de la ligne et de la mire. L'intensité est obtenue sous la forme d'une fonction des aberrations ; les coefficients qui interviennent dans ces formules ont été calculés pour diverses valeurs des dimensions des objets et de l'obturation.

Dans la troisième partie, on étudie plus en détail la qualité des images obtenues lorsqu'on applique l'une ou l'autre des deux tolérances. Pour que la qualité de l'image fournie par une pupille annulaire reste au moins celle que l'on exige d'une pupille circulaire, on trouve qu'il faut employer les tolérances déduites de l'étude du point lumineux. Ceci conduit à admettre une obturation maximum de 0,11 de la surface pour l'instrument sans aberrations. Les tolérances déduites de l'étude du point noir entraînent une qualité inférieure de l'image dans quelques cas critiques. On présente ensuite quelques vérifications expérimentales de la théorie.

La quatrième partie est relative au calcul des microscopes à miroirs ; on se propose de calculer les aberrations et l'obturation tolérables. On introduit dans les calculs des coefficients d'« obturations géométriques » et l'on utilise ces paramètres pour l'étude de systèmes déjà connus, puis de combinaisons nouvelles. On trouve, dans le cas des objectifs de microscope à miroirs, que, pour rester dans les limites des tolérances, il faut employer trois ou quatre miroirs non concentriques.

INTRODUCTION

Le but principal de ce travail est l'étude des images fournies par un instrument d'optique à pupille annulaire, c'est-à-dire une pupille circulaire dont la partie centrale circulaire est obturée. Il comprend la théorie de la formation des images de points et de quelques objets étendus compte tenu de la diffraction, et les relations, en optique géométrique, entre l'obturation et les aberrations dans un cas spécial important : celui du microscope à miroirs. Ce travail a, de plus, un deuxième

but : la définition, après une comparaison au cas de la pupille circulaire, des tolérances des aberrations lorsque la pupille est obturée, et l'application de ces tolérances au calcul des instruments à miroirs.

La pupille annulaire est une généralisation évidente de la pupille circulaire et quelques auteurs ont déjà étudié ce problème. Herschel s'est servi d'une obturation centrale en 1805 pour séparer les images de deux étoiles voisines et Lord Rayleigh l'a proposée comme moyen d'augmenter le pouvoir séparateur sur les points lumineux. Parmi les études théoriques, André [1], dans sa thèse sur la diffraction dans les instruments d'optique, y a inclus quelques cas d'obturation centrale, et Struve [2], dans son calcul de l'intensité dans l'image d'une ligne, a donné l'intégrale qui en résulte sans l'avoir calculée. Plus récemment, Steward [3, 4] a traité la pupille annulaire comme un cas particulier dans sa théorie des images des instruments aberrants ; au cours de cette étude, il a calculé les tolérances des aberrations basées sur l'image d'un point lumineux. Mais, tandis qu'une obturation centrale augmente le pouvoir séparateur ainsi que les tolérances lorsque le contraste de l'objet est pratiquement infini, le contraste de l'image pour des objets à contraste fini est toujours réduit et le pouvoir séparateur diminue. Les tolérances de Steward ne sont donc valables que dans quelques cas particuliers que l'on rencontre en astronomie.

La manière dont Grey [5] traite le microscope à miroirs est la seule à tenir compte de cette perte de contraste dans le calcul des tolérances. Nous avons aussi été conduit à cette étude par suite de recherches sur ces microscopes, car l'expérience montre que, dans le cas des objets rencontrés en microscopie, il faut regarder l'obturation, non comme une amélioration de l'instrument, mais comme un défaut qui abaisse la qualité de l'image de la même façon que les aberrations. Elle existe obligatoirement dans les instruments qui comprennent des miroirs utilisés sur l'axe, et l'on peut calculer des tolérances pour sa valeur maximum ainsi que le changement qu'elle entraîne sur les tolérances des aberrations. D'ailleurs, nous avons tenu compte, non seulement de l'image d'un point comme l'a fait Grey, mais aussi de celle de quelques objets étendus, ce qui, croyons-nous, fournit une étude plus complète des propriétés de ce type d'instrument.

1. Plan général. — Le travail qui suit se divise en quatre sections principales. Dans la première partie, nous étudions la qualité de l'image fournie par une pupille annulaire sans aberrations. Pour les objets étendus, nous nous servons des propriétés des fonctions de Bessel en calculant les intégrales qui s'introduisent. Les résultats de cette partie sont aussi exacts que les intégrales fondamentales de la diffraction que nous prenons comme point de départ ; les tolérances obtenues sont relatives à l'obturation en l'absence d'aberrations.

Dans la deuxième partie, nous calculons les images des mêmes objets en présence des aberrations. Puisqu'il n'est plus possible de calculer un résultat exact pour tous les cas, nous faisons un calcul approximatif qui est valable tant que les aberrations sont de l'ordre de grandeur des tolérances. D'ailleurs, les intégrations

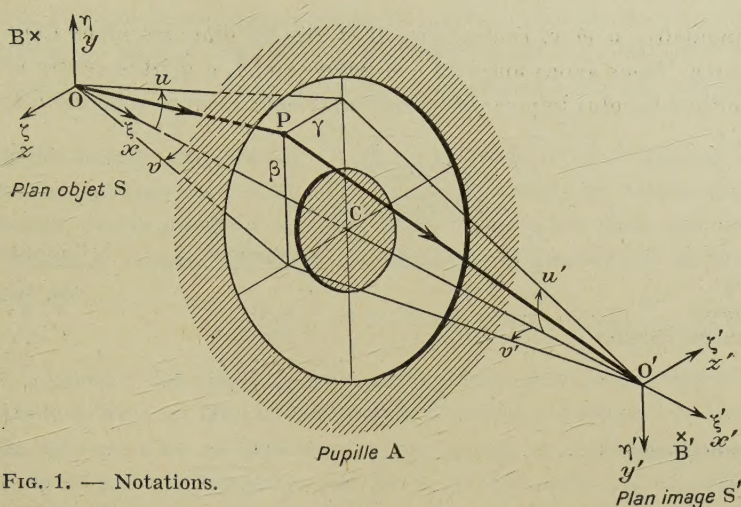


FIG. 1. — Notations.

obtenues au moyen des fonctions de Bessel ne sont plus utilisables et nous calculons les images des objets étendus par la transformation de Fourier, méthode très puissante dont les applications à l'optique ont été précisées par Duffieux [6].

Nous présentons, dans la partie suivante, une mise au point sur les tolérances, basée sur les calculs des sections précédentes et sur une étude expérimentale d'un cas particulier.

Finalement, nous étudions l'optique géométrique des microscopes à miroirs. En général, l'obturation d'un instrument à miroirs dépend de la grandeur du champ et l'on peut choisir sa valeur à volonté. Mais, dans le cas de l'objectif de microscope, on ne peut pas changer l'obturation sans changer les aberrations. Comme l'obturation joue ici un rôle très important, nous indiquons les relations entre l'obturation et les aberrations et les possibilités d'obtenir des images acceptables.

2. Notations et hypothèses. — Dans ce travail, nous nous occupons des pupilles annulaires. Le rapport du diamètre de la partie centrale obturée à celui de la pupille entière sera appelé « obturation » et désigné par la lettre p ; le rapport des surfaces correspondantes est alors p^2 .

Dans les sections concernant l'optique physique, nous prenons le système de coordonnées représenté par la figure 1. Soit O un point de l'objet, non nécessairement sur l'axe optique, à une distance l de la pupille d'entrée de l'instrument, et soit O' son image géométrique à une distance l' de la pupille de sortie (les deux pupilles sont représentées confondues sur la figure). Nous exprimons l et l' en coordonnées optiques, c'est-à-dire que les distances sont divisées par l'indice du milieu. Pour préciser les positions des autres points dans l'espace-objet, nous prenons un système d'axes de coordonnées $Oxyz$ ainsi qu'on le voit sur la figure ; pour l'espace-image, nous prenons un système semblable $O'x'y'z'$ et qui est tel que $O'y'$ soit l'image géométrique de Oy , etc.

La position d'un point quelconque de la pupille sera caractérisée par les coor-

données angulaires u et v , centrées en O et situées dans les plans COy et COz respectivement. Nous avons aussi les coordonnées u' et v' dont le centre est en O'.

Les quantités les plus importantes dont nous nous servons sont indiquées dans le tableau 1.

TABLEAU 1
NOTATION GÉNÉRALE

	Espace-objet	Espace-image
<i>Objet et image :</i>		
Cordonnées	x, y, z	x', y', z'
Coordonnées réduites	ξ, η, ζ	ξ', η', ζ'
	$\xi = \pi U^2 x / \lambda$	$\xi' = \pi U'^2 x' / \lambda$
	$\eta = 2\pi U y / \lambda$	$\eta' = 2\pi U' y' / \lambda$
	$\zeta = 2\pi U z / \lambda$	$\zeta' = 2\pi U' z' / \lambda$
Coordonnées polaires	ω, θ	ω', θ'
	$\omega = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$	$\omega' = \sqrt{\eta'^2 + \zeta'^2}$
	$\text{tg } \theta = \zeta / \eta$	$\text{tg } \theta' = \zeta' / \eta'$
Elément de surface	$ds = dy dz$	$ds' = dy' dz'$
	$d\sigma = d\eta d\zeta$	$d\sigma' = d\eta' d\zeta'$
Distance à l'axe optique	Y	Y'
<i>Pupille :</i>		
Coordonnées angulaires	u, v	u', v'
Valeurs maxima	U	U'
Coordonnées réduites	$\beta = u/U$	$\beta = u'/U'$
	$\gamma = v/U$	$\gamma = v'/U'$
Coordonnées polaires	ρ, φ	ρ, φ
	$\rho = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$	
	$\text{tg } \varphi = \gamma / \beta$	
	$v = \rho^2$	
Elément de surface	$da = l^2 du dv$	$da = l'^2 du' dv'$
	$d\alpha = d\beta d\gamma$	$d\alpha$
Amplitude vibratoire du point lumineux.	b	
Luminance de l'objet	B	
Longueur d'onde	λ	

On peut exprimer la différence entre le chemin optique d'un point quelconque B (y, z) dans le plan de l'objet au point B' (y', z') de l'image passant par P (u, v) et celui de O à O' passant également par P, sous la forme :

$$\begin{aligned}
 [\text{BP}] + [\text{PB}'] - [\text{OP}] - [\text{PO}'] &= l\sqrt{1 + (u - y/l)^2 + (v - z/l)^2} - l\sqrt{1 + u^2 + v^2} - \\
 &\quad - l'\sqrt{1 + (u' - y'/l')^2 + (v' - z'/l')^2} + l'\sqrt{1 + u'^2 + v'^2} \\
 &\approx \frac{u'y' + v'z'}{\sqrt{1 + u'^2 + v'^2}} - \frac{uy + vz}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} - \frac{y'^2 + z'^2}{2l'} + \frac{y^2 + z^2}{2l} + \dots
 \end{aligned}$$

Nous supposons que l'objet et l'image sont petits par rapport à la pupille, c'est-à-dire que $y/l, z/l \ll u, v$, etc.

Une difficulté théorique semble se présenter dans les cas où l'on fait les intégrations à l'infini sur l'objet ou sur l'image, mais en pratique toutes les inté-

grales que l'on rencontre convergent assez rapidement pour que l'on puisse considérer l'intégrale comme prise sur une surface finie, assez grande pour donner une valeur très proche de la valeur à l'infini, mais encore petite par rapport à la pupille.

Il reste les facteurs gênants $1/\sqrt{1+u^2+v^2}$ et $1/\sqrt{1+u'^2+v'^2}$ qui expriment l'inclinaison des rayons. Pour avoir des résultats corrects en valeur absolue, nous supposons que la pupille a une ouverture assez faible pour que ces facteurs soient égaux à l'unité. Dans ces conditions, la différence de chemin optique s'exprime par

$$u' y' + v' z' - u y - v z.$$

Mais la plupart des résultats de ce travail concernent les intensités rapportées à celles que fournit un instrument parfait de même ouverture. Ces facteurs d'inclinaison sont alors les mêmes dans les deux cas et les résultats sont valables jusqu'aux ouvertures assez grandes ; ce fait a été démontré par les expériences de Maréchal [7].

Pour les mêmes raisons, nous pouvons employer comme point de départ la formule scalaire de Stokes. Pour trouver les vrais résultats il faut se servir d'un calcul vectoriel, mais les erreurs dues à l'emploi d'une formule scalaire sont plus importantes vers le bord de la pupille et elles doivent être presque nulles si l'on ne calcule que les résultats relatifs à la pupille circulaire de même ouverture.

3. Equation fondamentale. — Si le système optique introduit au point P une différence de chemin Δ par rapport au point C, due aux aberrations, la différence totale devient

$$u' y' + v' z' - u y - v z + \Delta,$$

et la différence de phase est

$$\beta (\eta' - \eta) + \gamma (\zeta' - \zeta) + \psi,$$

$$\text{où} \quad \psi = 2 \pi \Delta / \lambda.$$

L'amplitude F' au point (y', z') due à un point lumineux (y, z) d'amplitude b , est donnée par la formule de Stokes (voir Sommerfeld [8]), qui s'écrit en notation complexe ($i = \sqrt{-1}$) :

$$\begin{aligned} F' &= i e^{2\pi i (l' + l)/\lambda} \frac{b}{\lambda l l'} \int_{\Delta} e^{i\psi} e^{i\beta (\eta' - \eta) + i\gamma (\zeta' - \zeta)} d\alpha \\ &= \frac{b u u'}{\lambda} \int_{\Delta} e^{i\psi} e^{i\beta (\eta' - \eta) + i\gamma (\zeta' - \zeta)} d\alpha, \end{aligned}$$

à un facteur de phase près, où $\int_{\Delta} d\alpha$ et $\int_{\Delta} d\alpha$ représentent des intégrations sur la surface de la pupille en coordonnées linéaires et en coordonnées réduites respectivement.

PREMIÈRE PARTIE

L'INSTRUMENT PARFAIT

Dans l'équation de Stokes, la phase ϕ est nulle dans le cas d'un instrument sans aberrations rigoureusement mis au point. Dans cette section, nous considérons les solutions correspondant à ce cas pour des objets différents ; les solutions sont exactes et, en général, la section se caractérise par la théorie des fonctions de Bessel. Vers la fin de la section, nous étudierons de plus un défaut de mise au point pour contrôler certains résultats approximatifs de la section suivante.

I. — L'image du point

1. **Le point lumineux.** — En prenant comme objet un point lumineux d'amplitude b , situé en O , l'amplitude au point (y', z') dans l'image s'écrit, en coordonnées polaires :

$$F' = \frac{b U U'}{\lambda} \int_A e^{i p \omega' \cos \varphi} d\alpha$$

$$(1.1) \quad F' = \frac{2 \pi b U U'}{\lambda} \mathcal{J}_p(\omega'),$$

où

$$\mathcal{J}_p(\omega') = \frac{J_1(\omega')}{\omega'} - p^2 \frac{J_1(p\omega')}{p \omega'},$$

la valeur au centre étant $\pi b U U' (1 - p^2)/\lambda$.

Le module carré de l'amplitude est généralement appelé l'intensité ; plus précisément, c'est l'éclairement dans le plan de l'image. En remplaçant l'intensité b^2 de la source par $B ds$ où B est la luminance, la répartition des éclaircissements dans l'image est donnée, en coordonnées réduites, par

$$(1.2) \quad I' = U'^2 B d\sigma \mathcal{J}_p^2(\omega')$$

et

$$I'_0 = U'^2 B d\sigma (1 - p^2)^2/4 \quad \text{au centre.}$$

L'énergie totale dans l'image s'exprime par

$$\int_{s'} I' ds' = 2 \pi U^2 B ds \left[\int_0^\infty \frac{J_1^2(\omega')}{\omega'} d\omega' + p^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(p\omega')}{p\omega'} dp\omega' \right. \\ \left. - 2 p \int_0^\infty \frac{J_1(\omega') J_1(p\omega')}{\omega'} d\omega' \right].$$

Cette dernière intégrale est un cas particulier de l'intégrale de Weber-Schafheitlin, sa valeur est $p/2$. On a donc

$$\int_{s'} I' ds' = \pi U^2 (1 - p^2) B ds, \quad \text{résultat en accord avec la photométrie.}$$

2. **Le point noir sur plage lumineuse incohérente.** — L'éclairement en (y', z') dû à une source en (y, z) s'écrit :

$$(1.3) \quad I' = U'^2 B \, d\sigma \, \mathcal{J}_p^2(W),$$

$$\text{où} \quad W = \sqrt{(\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}.$$

Par des intégrations semblables à celles citées plus haut, on trouve que l'éclairement en (y', z') dû à la plage est :

$$\int_s I' \, d\sigma = \pi U'^2 (1 - p^2) B.$$

Le point noir provoque une diminution d'éclairement égale à $I' (y', z')$, et, en définissant le contraste comme la baisse d'éclairement divisée par l'éclairement du fond, le contraste en (y', z') s'écrit :

$$(1.4) \quad \gamma' = \frac{d\sigma}{\pi(1 - p^2)} \mathcal{J}_p^2(w').$$

$$\text{et} \quad \gamma'_0 = (1 - p^2) \, d\sigma / \pi \quad \text{au centre.}$$

Ces valeurs de l'intensité centrale et du contraste central ne sont que des cas particuliers de la loi générale suivant laquelle l'intensité de l'image d'une plage est proportionnelle à la surface de la pupille, tandis que celle du point dépend de son carré.

3. **Qualité de l'image.** — Dans le cas de l'instrument aberrant, on juge la qualité de l'image d'après la valeur de son intensité centrale comparée à celle fournie par l'instrument parfait de même ouverture. Nous appellerons cette intensité relative la « qualité » et nous la désignerons par Q ; nous préférons ce nom à celui de « définition » utilisé par Nijboer [9]. Nous arrivons maintenant à la question de la définition de la qualité des images dues aux pupilles annulaires, question fondamentale si l'on veut comparer les effets des aberrations et des obturations.

Si nous comparons les intensités du point lumineux pour la pupille annulaire et la pupille circulaire, nous trouvons

$$(1.5) \quad Q_a = (1 - p^2)^2 ;$$

une comparaison des contrastes du point noir nous donne

$$(1.6) \quad Q_b = 1 - p^2.$$

D'après ces deux définitions, l'intensité relative dans toute l'image serait, soit

$$(1.5) \quad I' = 4 \, \mathcal{J}_p^2(w'),$$

soit

$$(1.6) \quad I' = \frac{4}{1 - p^2} \mathcal{J}_p^2(w').$$

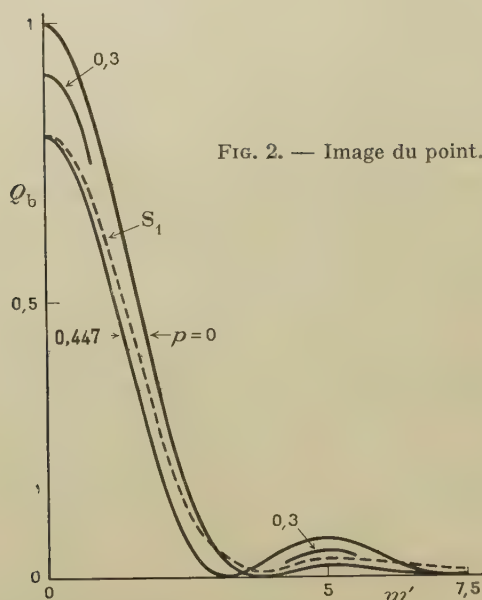


FIG. 2. — Image du point.

Les formules (1.6) sont celles employées par Grey [5], mais bien qu'elles semblent plus raisonnables, on ne peut pas décider entre (1.5) et (1.6) d'après le seul cas du point, car l'utilisation de l'intensité centrale de l'image d'un point pour évaluer la qualité d'un instrument n'est qu'une simplification commode ; ce qui est important, c'est la répartition de la lumière dans toute l'image qui n'en dépend que partiellement.

Nous résoudrons cette question par une étude des images de quelques objets étendus ; dans chaque cas, nous trouverons la valeur de l'obturation qui donne

la même qualité qu'une aberration de valeur égale à sa tolérance. Bien que ces tolérances soient basées sur l'intensité centrale d'un point, elles ont déjà démontré leur valeur pratique dans le cas des objets étendus.

Pour le point, une aberration tolérable donne une qualité de 0,8 d'après le critérium de Rayleigh, ce qui conduit aux deux tolérances suivantes pour l'obturation :

$$p^2 \leq 0,106 \quad , \quad p \leq 0,325, \quad \text{d'après l'intensité du point lumineux,}$$

$$\text{ou} \quad p^2 \leq 0,2 \quad , \quad p \leq 0,447, \quad \text{d'après le contraste du point noir.}$$

Les graphiques correspondant à la formule (1.6) pour l'intensité relative, sont représentés sur la figure 2 pour $p = 0; 0,3$ et $0,447$; à titre de comparaison, nous donnons la courbe relative à l'aberration sphérique du 3^e ordre. On voit que l'effet de l'obturation est de déplacer une partie de la lumière de la tache centrale vers les anneaux ; la tache centrale devient plus étroite. On voit que l'on obtient la légère augmentation du pouvoir séparateur sur les objets de forts contrastes dont nous avons déjà parlé, mais le contraste des images des objets étendus est réduit.

4. Images des disques circulaires. — La quantité de lumière à l'intérieur d'un cercle de rayon w' s'exprime par $\int_0^{w'} I' w' dw'$; c'est en même temps l'intensité centrale de l'image d'un disque dont l'image géométrique a un rayon w' .

Dans le cas du disque noir, le contraste ne contient pas de facteur proportionnel à l'ouverture ; la difficulté de définir la qualité disparaît dans le cas d'objets à deux dimensions.

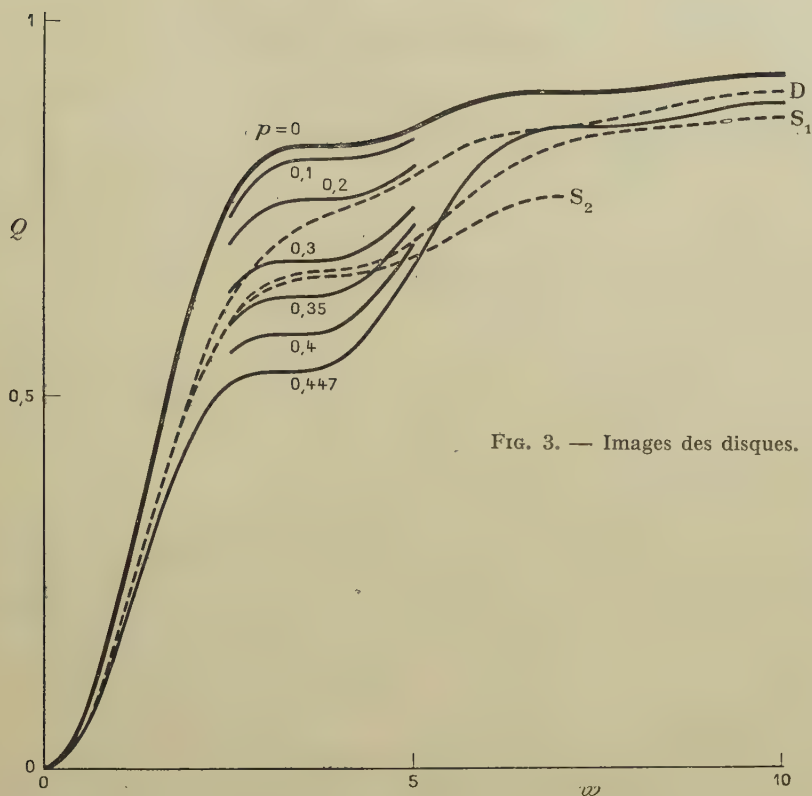


FIG. 3. — Images des disques.

La qualité de l'image d'un disque est :

$$(1.7) \quad \frac{4}{1-p^2} \int_0^\omega \mathcal{J}_p^2(\omega) \omega \, d\omega ;$$

nous l'avons calculée par voie de quadrature numérique dans les cas représentés sur la figure 3. Nous donnons aussi les courbes pour une pupille circulaire en présence d'un défaut de mise au point (D) et d'aberrations sphériques du 3^e (S₁) et du 5^e ordre (S₂) ; dans chaque cas, le défaut est égal à sa tolérance et la mise au point est celle qui donne la meilleure qualité pour l'image d'un point. Ces courbes sont calculées par quadratures numériques d'après les résultats de Martin [10].

On voit immédiatement que les effets des aberrations que nous prenons comme point de comparaison ne sont pas identiques. Mais, par rapport à l'aberration sphérique, la tolérance sur l'obturation est 0,315 si l'on exige une même qualité dans le cas le moins favorable, c'est-à-dire $\omega = 3,8$, rayon du premier anneau noir. Mais, au delà de $\omega = 7$, rayon du deuxième anneau noir, la qualité pour $p = 0,447$ est égale ou meilleure que celle fournie par la pupille circulaire aberrante.

II. — Image de la ligne incohérente

Comme deuxième cas d'objet étendu, nous considérons la droite lumineuse et la droite noire sur un fond lumineux. Le résultat fournit aussi la dérivée de l'intensité au bord d'un plan.

L'intensité en (y', z') due à une droite lumineuse $y = 0$ se présente sous la forme d'une intégrale de $z = -\infty$ à $z = +\infty$ de l'intensité due au point $(0, z)$. Par raison de symétrie, sa valeur est indépendante de z' et l'on peut poser $z' = 0$.

En posant $\eta = 0$, $\zeta' = 0$ dans la formule (1.3), l'intensité en y' due à la ligne s'écrit :

$$\begin{aligned} L' &= U'^2 B \, d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{J_1(\sqrt{\eta'^2 + \zeta'^2})}{\sqrt{\eta'^2 + \zeta'^2}} - p \frac{J_1(p\sqrt{\eta'^2 + \zeta'^2})}{\sqrt{\eta'^2 + \zeta'^2}} \right]^2 d\zeta \\ (1.8) \quad &= U'^2 B \, d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_p^2(w') \, d\zeta', \end{aligned}$$

puisque $w' = \sqrt{\eta'^2 + \zeta'^2}$. Le changement de variable d'intégration exprime le théorème d'André d'après lequel l'intensité de la ligne est proportionnelle à la surface de la section du solide de diffraction.

1) Pupille circulaire.

Dans le cas de la pupille circulaire, on a

$$L' = 2 \, U'^2 B \, d\eta \int_{\eta'}^{\infty} \frac{J_1^2(w') \, dw'}{w' \sqrt{w'^2 - \eta'^2}}.$$

Struve [2] a montré que

$$\int_{\eta'}^{\infty} \frac{J_1^2(w') \, dw'}{w' \sqrt{w'^2 - \eta'^2}} = \frac{2}{\pi \eta'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2 \eta' \sin \theta) \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{H_1(2 \eta')}{2 \eta'^2}.$$

où $H_1(2 \eta')$ est la fonction de Struve du premier ordre qui est définie de la façon suivante :

$$H_1(2 \eta') = \frac{4 \eta'}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2 \eta' \sin \varphi) \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

Nous avons indiqué [11] des développements en série de cette fonction.

Une table de $H_1(x)$ à sept chiffres jusqu'à $x = 16$ est donnée par Watson [12].

L'intensité centrale $L'(0)$ est $8 U'^2 B \, d\eta / 3\pi$ et la valeur relative à l'unité au centre est

$$(1.9) \quad L'(\eta') = \frac{3 \pi}{8} \frac{H_1(2 \eta')}{\eta'^2}.$$

2) Pupille annulaire.

La formule (1.8) donne la valeur relative de l'intensité de la ligne lumineuse par rapport à une intensité centrale unité quand l'obturation est nulle sous la forme

$$(1.10) \quad L'(\eta') = \frac{3\pi}{8} \left[\frac{\mathbf{H}_1(2\eta')}{\eta'^2} + p^3 \frac{\mathbf{H}_1(2p\eta')}{p^2\eta'^2} - 4p \int_{\eta'}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_1(w') \mathbf{J}_1(pw')}{w' \sqrt{w'^2 - \eta'^2}} dw' \right],$$

et un contraste de la ligne noire de $1/(1 - p^2)$ fois cette valeur. On ne peut pas exprimer cette intégrale par des fonctions connues, mais Struve a montré que

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \int_{\eta'}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_1(w') \mathbf{J}_1(pw')}{w' \sqrt{w'^2 - \eta'^2}} dw' &= \frac{p}{\pi\eta'} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\eta' \sqrt{1 - 2p \cos \varphi + p^2})}{1 - 2p \cos \varphi + p^2} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{2k^2}{\pi\eta'} \int_0^1 \frac{\sin[\eta'(1+p)\sqrt{1-k^2x^2}]}{1-k^2x^2} x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{2k^2}{\pi\eta'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[\eta'(1+p) \operatorname{dn} t] \frac{\operatorname{sn}^2 t \operatorname{cn} t}{\operatorname{dn} t} dt, \end{aligned}$$

où $x = \sin \frac{\varphi}{2} = \operatorname{sn} t, \quad k^2 = 4p/(1+p)^2.$

On remarquera le rapport entre cette dernière forme en fonctions elliptiques et l'intégrale en fonctions circulaires qui définit $\mathbf{H}_1(2\eta')/2\eta'^2$.

(a) *Intensité centrale.* Quand $\eta' = 0$, l'intégrale appartient à la forme générale de Weber-Schafheitlin et l'on a

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathbf{J}_1(w') \mathbf{J}_1(pw')}{w'^2} dw' = \frac{p}{2} \mathbf{F}(-1/2, 1/2, 2; p^2).$$

On peut développer en série la fonction hypergéométrique ; on trouve :

$$\mathbf{F}(-1/2, 1/2, 2; p^2) = 1 - \frac{p^2}{8} - \frac{p^4}{64} - \frac{5p^6}{1024} - \dots$$

La formule (1.11) fournit une expression équivalente ; lorsque $\eta' \rightarrow 0$, on a

$$\int_{\eta'}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_1(w') \mathbf{J}_1(pw')}{w' \sqrt{w'^2 - \eta'^2}} \rightarrow \frac{2}{3\pi p} [(1+p^2) \mathbf{E} - (1-p^2) \mathbf{K}],$$

où K et E sont les intégrales elliptiques :

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-p^2x^2}}, \quad \mathbf{E} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-p^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

L'intensité centrale nous donne pour la qualité de l'image

$$(1.12) \quad Q = \frac{1 + p^3 + (1-p^2) \mathbf{K} - (1+p^2) \mathbf{E}}{1-p^2}.$$

Dans le tableau 2 des valeurs de la qualité sont données ainsi que celles correspondant à la pupille circulaire aberrante calculées par Maréchal et Pieuchard [43].

Il existe une différence assez forte entre les effets des aberrations différentes. Mais, la coma exceptée, on peut dire que les aberrations réduisent la qualité de

TABLEAU 2
QUALITÉ DE L'IMAGE D'UNE DROITE

Pupille obturée :

p^2	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
Q	1	0,987	0,941	0,889	0,836	0,788

Pupille aberrante :

Aberration	D	S_1	S_2	C_1	
Q	0,840	0,822	0,811	0,77	et 0,90

D = défaut de mise au point ; S_1 , S_2 = aberrations sphériques du 3^e et du 5^e ordre, C_1 = coma du 3^e ordre.

l'image d'une ligne moins que celle du point, tandis qu'une obturation de $p^2 = 0,2$ la réduit davantage. D'après les valeurs citées de Q , une obturation telle que $p^2 \leq 0,16$ donne une qualité comparable à la moyenne de Q en présence des aberrations.

(b) *Intensité loin de l'axe.* Pour calculer la répartition générale de l'éclairement, il faut développer en série l'intégrale (1.11). On trouve :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{\sin [\eta'(1+p) \sqrt{1-k^2 x^2}]}{1-k^2 x^2} x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(1+p) \eta']^{2n+1}}{(2n+1)!} (1-k^2 x^2)^{n-\frac{1}{2}} \\
 (1.13) \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(1+p) \eta']^{2n+1}}{(2n+1)!} A_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{k^4} \int_{\arccos k}^{\frac{\pi}{2}} \sin [\eta'(1+p) \sin \varphi] \sqrt{k^2 - \cos^2 \varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi, \\
 (1.14) \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_{2n+1} [\eta'(1+p)],
 \end{aligned}$$

$$\text{où } A_n = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} (1-k^2 x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } B_n &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2n+1)(2n+1^2-1^2)(2n+1^2-3^2)\dots(2n+1^2-2r-1^2)}{(2r+1)!} A_r \\
 &= (-1)^n [4^n A_n - \frac{(2n+1)4^{n-1}}{1!} A_{n-1} + \frac{(2n+1)(2n-2)}{2!} 4^{n-2} A_{n-2} \\
 &\quad - \frac{(2n+1)(2n-3)(2n-4)}{3!} 4^{n-3} A_{n-3} \dots (-1)^n (2n+1) A_0].
 \end{aligned}$$

Pour calculer les coefficients A_n , on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} dx,$$

et, en se servant de l'équation

$$\frac{d}{dx} (x^{2n-3} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}) = \frac{(2n-3)x^{2n-4} - (2n-2)(1+k^2)x^{2n-2} + (2n-1)k^2 x^{2n}}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}},$$

on trouve que

$$u_n = \frac{2n-2}{2n-1} \frac{1+k^2}{k^2} u_{n-1} - \frac{2n-3}{2n-1} \frac{1}{k^2} u_{n-2},$$

où

$$u_0 = K(k)$$

$$u_1 = \frac{1}{k^2} [K(k) - E(k)].$$

On peut ensuite calculer u_2, u_3 . On a donc

$$\begin{aligned} A_n = u_1 - u_2 &= \frac{1}{3k^4} [(2-k^2)E(k) - 2(1-k^2)K(k)] \\ &= \frac{1+p}{12p^2} [(1+p^2)E(p) - (1-p^2)K(p)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 = u_1 - (1+k^2)u_2 + k^2 u_3 \\ &= \frac{1}{15k^4} [2(1-k^2+k^4)E(k) - (2-3k^2+k^4)K(k)] \\ &= \frac{(1+p)^3}{60p^2} [(1+14p^2+p^4)E(p) - (1-p^2)(1-p+8p^2-p^3+p^4)K(p)]. \end{aligned}$$

On trouve une formule de récurrence pour A_n en se servant de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^3 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} (1-k^2 x^2)^{n-\frac{3}{2}} \right] &= x^2 \sqrt{1-x^2} (1-k^2 x^2)^{n-\frac{5}{2}} \left[\frac{-2n+3}{k^2} (1-k^2 x^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2n(2-k^2)}{k^2} (1-k^2 x^2) + (2n-3) \frac{1-k^2}{k^2} \right] \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2n}{2n+3} (2-k^2) A_{n-1} - \frac{2n-3}{2n+3} (1-k^2) A_{n-2}, \\ &= \frac{4n(1+p^2)}{(2n+3)(1+p)^2} A_{n-1} - \frac{2n-3}{2n+3} \left(\frac{1-p}{1+p} \right)^2 A_{n-2}. \end{aligned}$$

Nous avons calculé l'intensité relative pour $p = 1/3$ et $p = 1/2$ en employant les deux formules :

$$\begin{aligned} L' &= \frac{3\pi}{8(1-p^2)} \left[\frac{H_1(2\eta')}{\eta'^2} + p^3 \frac{H_1(2p\eta')}{p^2 \eta'^2} - \frac{32p^2}{\pi(1+p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [(1+p)\eta']^{2n}}{(2n+1)!} A_n \right] \\ &= \frac{3\pi}{8(1-p)^2} \left[\frac{H_1(2\eta')}{\eta'^2} + p^3 \frac{H_1(2p\eta')}{p^2 \eta'^2} - \frac{64p^2}{\pi(1+p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{2n+1}[(1+p)\eta']}{\eta'} B_n \right]. \end{aligned}$$

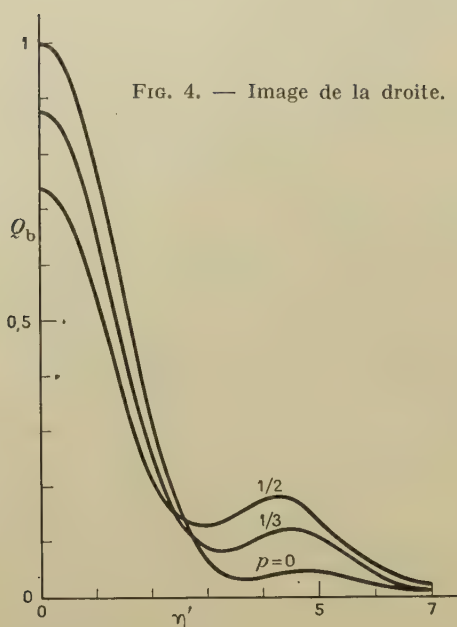


FIG. 4. — Image de la droite.

Les courbes de la figure 4 montrent les résultats obtenus pour ces deux valeurs de p ainsi que pour $p = 0$. On voit que l'obturation produit une bande centrale qui est plus étroite que celle fournie par un instrument sans obturation, mais qu'il y a une augmentation de l'intensité des franges.

Les deux cas de $p = 0$ et $p = 1/2$ ont été calculés par André [1], manifestement par des quadratures numériques. Dans les deux cas, il existe des différences importantes entre ses valeurs et les nôtres, mais, comme le cas de $p = 0$ correspond à la fonction simple de Struve, la valeur donnée par André est évidemment incorrecte, et il nous semble probable qu'il a fait une erreur également dans l'autre cas.

Image du bord du plan semi-infini. — L'intensité dans ce cas est représentée sur la figure 5. Les résultats sont calculés au moyen de quadratures numériques à partir des valeurs de la figure 4. La concentration de la lumière dans les bandes situées de part et d'autre de l'image de la ligne produit au bord du plan des variations du gradient d'intensité qui paraissent à l'œil comme une bande d'intensité inférieure à celle du plan; dans le cas de la pupille aberrante sans obturation, la variation d'intensité est plus continue.

Ces effets sont bien évidents si l'on regarde l'image du test d'Abbé dans un microscope dont l'objectif possède une obturation centrale, l'objectif à miroirs.

III. — La mire infinie

Le cas le plus simple de la mire périodique est celui de la mire sinusoïdale. A partir de cette mire, on peut étudier tous les autres types, comme par exemple la mire de Foucault, par une analyse harmonique.

1. La mire sinusoïdale. — On obtient l'intensité en $y' = 0$ due à une droite $y = y$ par symétrie à partir des équations (1.3) et (1.11).

On trouve

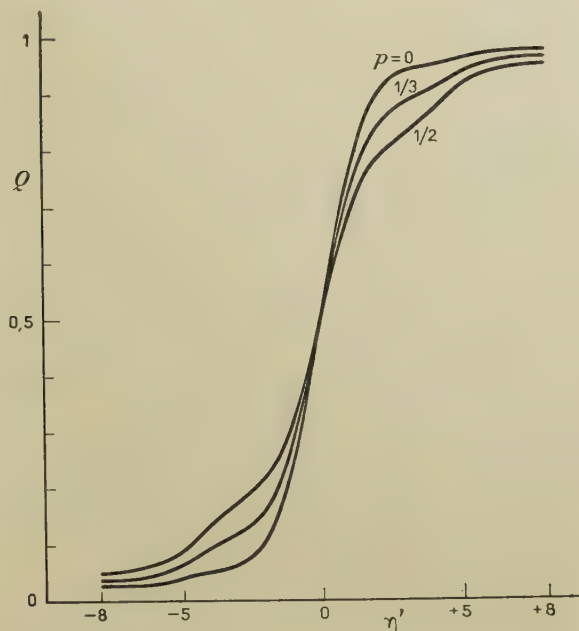


FIG. 5. — Bord de plage.

$$(1.15) \quad L'(0) = U'^2 B \, d\eta \left[\frac{\mathbf{H}_1(2\eta)}{\eta^2} + p \frac{\mathbf{H}_1(2p\eta)}{\eta^2} - \frac{4p^2}{\eta\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(\eta\sqrt{1-2p\cos\varphi+p^2})}{1-2p\cos\varphi+p^2} \sin^2\varphi \, d\varphi \right].$$

Pour la mire périodique, B est une fonction de η . La mire sinusoïdale est donnée par :

$$B = B_c + B_v \cos 2\omega\eta$$

où B_c , B_v sont constants et le pas de la mire est π/ω , 2ω étant la fréquence.

(a) *Pupille circulaire.* L'intensité centrale s'écrit :

$$M'(0) = 2 U'^2 B_c \int_0^\infty \frac{\mathbf{H}_1(2\eta)}{\eta^2} \, d\eta + 2 U'^2 B_v \int_0^\infty \frac{\mathbf{H}_1(2\eta)}{\eta^2} \cos 2\omega\eta \, d\eta.$$

La première intégrale se réduit à $\pi U'^2 B_c$; c'est l'intensité due au fond uniforme. Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \frac{\mathbf{H}_1(2\eta)}{\eta^2} \cos 2\omega\eta \, d\eta &= 8 \int_0^\infty \frac{\cos 2\omega\eta}{\pi\eta} \, d\eta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\eta \sin \theta) \cos^2\theta \, d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta \int_0^\infty \left\{ \frac{\sin[2(\omega + \sin \theta)\eta]}{\eta} + \frac{\sin[2(\omega - \sin \theta)\eta]}{\eta} \right\} d\eta. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -\pi/2, & a < 0, \end{cases}$$

l'intégrale

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{H}_1(2\eta)}{\eta^2} \cos 2\omega\eta \, d\eta = \begin{cases} 0, & \omega \geq 1, \\ 4 \int_{\arcsin \omega}^0 \cos^2 \theta \, d\theta, & \omega < 1. \end{cases}$$

et

$$M'(0) = \begin{cases} \pi U'^2 B_c, & \omega \geq 1, \\ \pi U'^2 B_c + 2 U'^2 B_v (\arccos \omega - \omega \sqrt{1-\omega^2}), & \omega < 1. \end{cases}$$

Donc la mire ne sera résolue que si ω est plus petit que 1, c'est-à-dire si le pas $\eta > \pi$ ou $y > \lambda/2U$.

La définition du contraste la plus commode pour les mires est l'amplitude de la variation périodique d'intensité divisée par l'intensité moyenne.

Nous appelons cela le contraste du type C ; pour l'objet $C = B_v/B_c$ et pour l'image

$$(1.16) \quad C' = C C'_0$$

$$\text{où} \quad C'_0 = \frac{2}{\pi} (\arccos \omega - \omega \sqrt{1-\omega^2}) \text{ lorsque } C = 1.$$

Le contraste habituel γ s'écrit :

$$\gamma = \frac{2C}{1+C} \text{ pour l'objet,}$$

et pour l'image :

$$(1.17) \quad \gamma' = \frac{2\gamma C'_0}{2-\gamma-\gamma C'_0} = \frac{\gamma\gamma'_0}{2-\gamma-\gamma'_0+\gamma\gamma'_0},$$

comme Arnulf [14] l'a indiqué, où γ'_0 est le contraste de l'image d'une mire de contraste 1.

(b) *Pupille annulaire.* On déduit de l'équation (1.15) que

$$\begin{aligned} M'(0) &= \frac{8 U'^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{B_c + B_v \cos 2\omega\eta}{\eta} d\eta \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\eta \sin \theta) \cos^2 \theta \, d\theta \right. \\ &\quad \left. + p^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2p\eta \sin \theta) \cos^2 \theta \, d\theta - p^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(\eta \sqrt{1-2p \cos \varphi + p^2})}{1-2p \cos \varphi + p^2} \sin^2 \varphi \, d\varphi \right\} \\ &= \pi U'^2 B_c (1-p^2) + \pi U'^2 B_v (I_1 + I_2 - I_3). \\ I_1 &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\eta \sin \theta) \cos 2\omega\eta}{\eta} d\eta, \end{aligned}$$

c'est l'intégrale déjà trouvée dans le cas de la pupille circulaire,

$$I_1 = \begin{cases} 0 & , \omega \geq 1, \\ \frac{2}{\pi} (\arccos \omega - \omega \sqrt{1 - \omega^2}) & , \omega < 1, \end{cases}$$

$$\text{et } I_2 = \begin{cases} 0 & , \omega \geq p, \\ \frac{2}{\pi} p^2 (\arccos \frac{\omega}{p} - \frac{\omega}{p^2} \sqrt{p^2 - \omega^2}), & \omega < p. \end{cases}$$

$$I_3 = \frac{8 p^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{1 - 2 p \cos \varphi + p^2} \int_0^\infty \frac{\sin (\eta \sqrt{1 - 2 p \cos \varphi + p^2}) \cos 2 \omega \eta}{\eta} \, d\eta$$

$$= \begin{cases} 0 & , 2 \omega \geq 1 + p, \\ 2 p^2 & , 2 \omega \leq 1 - p, \\ 2 p^2 - \frac{2 p}{\pi} \sin 2 c - \frac{2}{\pi} (1 + p^2) c & \\ \quad + \frac{2}{\pi} (1 - p^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + p}{1 - p} \operatorname{tg} c \right), & 1 - p < 2 \omega < 1 + p, \end{cases}$$

$$\text{où } \sin c = \sqrt{\frac{4 \omega^2 - (1 - p)^2}{4 p}}, \quad \cos c = \sqrt{\frac{(1 + p)^2 - 4 \omega^2}{4 p}}.$$

Le contraste s'exprime par

$$(1.18) \quad C'_0 = \frac{I_1 + I_2 - I_3}{1 - p^2}$$

$$(1.19) \quad \gamma'_0 = \frac{2 (I_1 + I_2 - I_3)}{1 - p^2 + I_1 + I_2 - I_3}.$$

La qualité est obtenue directement en faisant le rapport entre ces valeurs et celles relatives à la pupille circulaire. Il n'existe plus de différence entre la valeur déduite de l'objet lumineux et celle déduite de l'objet noir ; il y a cependant une légère différence entre les valeurs fournies par les deux définitions du contraste. On a

$$(1.20) \quad Q_1 = \frac{1}{1 - p^2} \frac{I_1 + I_2 - I_3}{I_1}, \text{ d'après } C',$$

$$Q_2 = \frac{I_1 + I_2 - I_3}{I_1} \cdot \frac{1 + I_1}{1 - p^2 + I_1 + I_2 - I_3}, \text{ d'après } \gamma'.$$

Les courbes représentant γ'_0 en fonction de ω sont tracées sur la figure 6. On voit que l'obturation produit une perte sérieuse de contraste pour ω voisin de 0,4, c'est-à-dire un pas 2,5 fois la limite de résolution. Mais, pour $2 \omega > 1 + p$, l'obturation produit une augmentation du contraste car, dans ce cas, l'obturation réduit l'intensité du fond sans avoir aucun effet sur l'intensité périodique.

Sur la même figure nous avons tracé une courbe relative à la pupille circulaire aberrante ; elle représente une moyenne pour un défaut de mise au point et les aberrations sphériques calculés dans la partie suivante. Pour un contraste com-

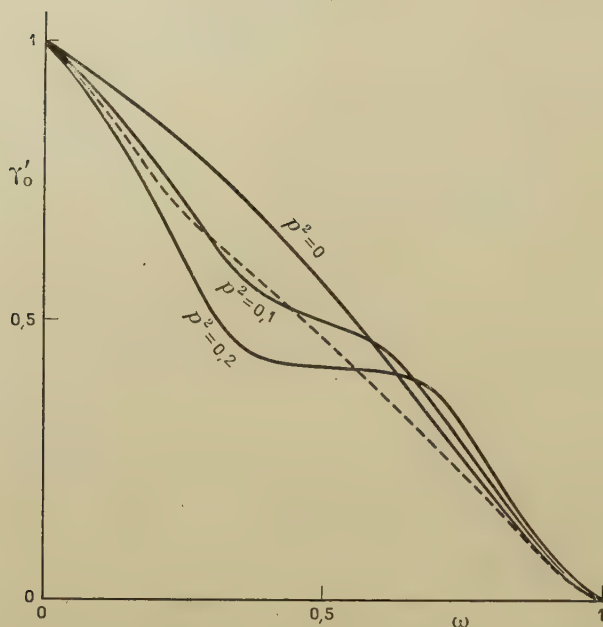


FIG. 6. — Mire infinie.

parable pour toutes les valeurs de ω , la tolérance sur l'obturation est $p^2 \leq 0,1$. La valeur $p^2 = 0,2$ est tolérable entre $\omega = 0$ et $0,2$ et entre $\omega = 0,55$ et 1 mais, dans les autres cas, elle engendre une perte de contraste nettement supérieure à celle qui est provoquée par les aberrations seules.

2. La mire de Foucault. — La luminance de cette mire est caractérisée par une fonction en créneaux et son développement en série de Fourier est donné par

$$B = B_c + \frac{4 B_v}{\pi} \left(\cos 2 \omega \eta - \frac{1}{3} \cos 6 \omega \eta + \frac{1}{5} \cos 10 \omega \eta - \dots \right)$$

où 2ω est la fréquence fondamentale. Son image est donc la somme des intensités dues aux mires sinusoïdales ; la limite de résolution est encore $\omega = 1$. On a les cas suivants :

a) $1 > \omega > 1/3$. Seule la fréquence fondamentale est transmise et l'image est sinusoïdale avec un contraste $4/\pi$ fois celui de la mire sinusoïdale de même fréquence.

b) $1/3 > \omega > 1/5$. L'image se compose des deux fréquences 2ω et 6ω et le contraste est donné par

$$C' = \frac{4C}{\pi} \left(C'_{2\omega} \cos 2 \omega \eta - \frac{1}{3} C'_{6\omega} \cos 6 \omega \eta \right)$$

où $C'_{2n\omega}$ est le contraste image d'une mire sinusoïdale de fréquence $2n\omega$ et de contraste objet 1.

Si $3 C'_6 \omega > C'_2 \omega$, on a deux maxima du contraste de chaque côté du centre ; ce phénomène se manifeste pour ω voisin de 0,2. L'effet est toujours très faible, mais il augmente avec l'obturation ou avec les aberrations.

c) $1/5 > \omega$. Pour les plus petites valeurs de ω , les fréquences $10\omega, 14\omega, \dots$, entrent successivement dans l'image dont la forme s'approche de celle de l'objet.

IV. — Intensité le long de l'axe

Nous étudierons ce cas par les méthodes d'approximation de la section suivante. Mais, pour contrôler les résultats, nous calculerons le cas d'un défaut de mise au point par des méthodes exactes.

1. **Le point.** — Pour un instrument sans aberration, mais avec un déplacement x' le long de l'axe du point où l'on fait l'observation, la phase s'écrit :

$$\psi = p^2 \xi' \quad \text{où} \quad \xi' = \pi U'^2 x' / \lambda.$$

L'amplitude en $(x', 0, 0)$ due à un objet en O s'exprime par

$$F' = \frac{\pi b U U'}{\lambda} \int_{p^2}^1 e^{i v \xi'} dv = \frac{\pi b U U'}{i \lambda \xi'} (e^{i \xi'} - e^{i p^2 \xi'}),$$

et l'intensité par

$$I' = \frac{U'^2 B d\sigma}{\xi'^2} \sin^2 \left[\frac{(1 - p^2) \xi'}{2} \right].$$

Pour la qualité de l'image, on a

$$(1.21) \quad Q_b = (1 - p^2) \frac{\sin^2 \chi}{\chi^2},$$

$$\text{où} \quad \chi = \frac{(1 - p^2) \xi'}{2}.$$

Donc, l'obturation ne change pas la forme de la répartition le long de l'axe, mais elle diminue d'un facteur $1 - p^2$ l'intensité et l'échelle des distances du foyer. En raison de ce dernier effet, la diminution relative d'intensité due à un certain défaut de mise au point est plus petite que dans l'instrument sans obturation. Mais, pour la valeur absolue d'intensité, le premier effet prédomine et l'on trouve une plus petite latitude de mise au point pour la pupille annulaire que pour la pupille circulaire.

2. **La ligne.** — A partir de l'expression générale pour l'intensité au point (x', y', z') en fonctions de Lommel (voir Steward [3]), nous avons calculé [11] la répartition de la lumière le long de l'axe pour l'image de la droite avec une pupille circulaire. Nous avons trouvé que l'intensité relative s'exprime par

$$(1.22) \quad L'(x') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi'^{2n},$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad a_0 &= 1 \\ a_n &= - \frac{32 n (2n - 1)}{(4n - 1)(4n + 1)^2 (4n + 3)} a_{n-1}. \end{aligned}$$

Les variations de cette fonction $L'(x')$ sont représentées dans l'article cité. L'intensité décroît de façon continue sauf aux points où la dérivée est nulle ; il n'y a ni maximum ni minimum en dehors du centre.

V. — Images en lumière cohérente

Nous étudierons finalement quelques cas d'objets éclairés en lumière cohérente. Dans ces cas, on effectue les intégrations sur l'amplitude et non sur l'intensité, et, en général, on obtient des résultats plus simples que dans le cas de la lumière incohérente.

Cependant, comme on le verra, les résultats de cette section ne permettent pas des comparaisons entre les qualités des instruments aberrants et de ceux à pupilles obturées.

En pratique, si l'objet est éclairé en lumière cohérente sans variation de phase, on doit avoir une source ponctuelle sur l'axe de l'instrument. En supposant que cette source ou son image soit située au centre de la pupille de l'instrument et qu'elle ait une intensité I , l'amplitude de l'objet s'écrit :

$$b = \sqrt{I} / \lambda l.$$

1. **Le point.** — a) *Le point lumineux.* En définissant une « intensité d'amplitude » $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B} ds = b$, l'amplitude de l'image est donnée par

$$F' = \frac{\lambda l}{2 \pi l'} \mathcal{B} d\sigma \mathcal{J}_p(w').$$

b) *Le point noir.* Pour la pupille circulaire, l'amplitude due à une plage uniforme s'écrit :

$$\mathcal{E}' = \lambda \mathcal{B} l / l'$$

et l'intensité :

$$P' = I / l'^2.$$

L'amplitude due au point noir sur plage uniforme est donc

$$F' = \frac{\lambda \mathcal{B} l}{l'} \left(1 - \frac{d\sigma}{2 \pi} \frac{\mathbf{J}_1(w')}{w'} \right)$$

et le contraste est proportionnel à $2 \mathbf{J}_1(w')/w'$ pourvu que la « surface du point » en coordonnées réduites $d\sigma$ soit petite par rapport à 2π .

Pour la pupille annulaire, on trouve que l'amplitude due à la plage est nulle parce que la lumière directe de la source est obturée et, dans l'image, il ne reste que la lumière diffractée par l'objet. On a le cas du fond noir où l'image d'un objet

noir est la même que l'image d'un objet lumineux. Seulement il y a la différence entre ce cas et le fond noir : d'habitude l'éclairage est interne et pas externe.

2) **La ligne.** — a) *Pupille circulaire.* L'amplitude due à une droite lumineuse s'écrit :

$$\mathcal{L}' = \frac{\lambda l}{\pi l'} \mathcal{B} \, d\eta \int_{\eta'}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_1(\omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \eta'^2}} \, d\omega'.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_y^{\infty} \frac{\mathbf{J}_1(x)}{\sqrt{x^2 - y^2}} \, dx &= \frac{2}{\pi} \int_y^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos \theta) \cos \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{J}_0(y \cos \theta) \cos \theta \, d\theta = \frac{\sin y}{y}. \end{aligned}$$

L'intensité

$$L' = \frac{I (d\eta)^2 \sin^2 \eta'}{\pi^2 l'^2 \eta'^2}.$$

Pour la ligne noire, on a l'amplitude

$$\mathcal{L}' = \frac{\lambda l}{l'} \mathcal{B} \left(1 - \frac{d\eta}{\pi} \frac{\sin \eta'}{\eta'} \right)$$

et le contraste est $2 \frac{d\eta}{\pi} \frac{\sin \eta'}{\eta'}$, pourvu que $d\eta \ll \pi$.

b) *Pupille annulaire.* Avec une obturation centrale, on a l'intensité

$$L' = \frac{I^2}{l'^2} \left(\frac{d\eta}{\pi} \right)^2 \frac{(\sin \eta' - \sin p \eta')^2}{\eta'^2},$$

pour la ligne lumineuse et également pour la ligne noire.

3. **La mire périodique.** — On ne peut pas trouver une amplitude réelle qui corresponde à une intensité sinusoïdale. Mais, en posant l'amplitude

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\lambda l} (a + b \cos 2\omega \overline{\eta - \eta_0}),$$

on trouve l'intensité

$$M = \frac{a^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{a} \cos 2\omega \overline{\eta - \eta_0} + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 2\omega \overline{\eta - \eta_0} \right).$$

Lorsque b est petit par rapport à a , le deuxième harmonique devient négligeable et l'on a une intensité à peu près sinusoïdale.

a) *Pupille circulaire.* L'amplitude au centre de l'image s'écrit :

$$\mathcal{N}' = \frac{2a}{\pi l'} \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} \, d\eta + \frac{2b}{\pi l'} \cos 2\omega \eta_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin \eta \cos 2\omega \eta}{\eta} \, d\eta,$$

$$\mathcal{M}' = \begin{cases} \frac{a}{l'} & , 2\omega \geq 1, \\ \frac{a + b \cos 2\omega r_0}{l'} & , 2\omega < 1. \end{cases}$$

Par symétrie, on trouve l'amplitude en η' due à une mire $r_0 = 0$, en remplaçant r_0 par η' . Pour $2\omega < 1$, l'image a la même forme et le même contraste que l'objet, mais la limite de résolution est réduite à $\omega = 1/2$. Mais, si l'on déplace la source au bord de la pupille, on trouve de nouveau la limite $\omega = 1$; le pouvoir séparateur en lumière cohérente est sensible, non seulement aux dimensions de la pupille, mais aussi à sa position, comme Duffieux l'a indiqué.

b) *Pupille annulaire*. Dans ce cas, on trouve :

$$\mathcal{M}'(\eta') = \begin{cases} 0 & , 2\omega \geq 1, \\ \frac{b}{l'} \cos 2\omega \eta', & 1 > 2\omega > p, \\ 0 & , 2\omega \leq p. \end{cases}$$

Quand $1 > 2\omega > p$, la fréquence de l'image est 4ω et son contraste est 1.

Pour expliquer ces résultats, nous rappellerons les expériences classiques d'Abbe. La mire sinusoidale donne sur la pupille une image centrale de la source ponctuelle et deux images diffractées dont les distances en coordonnées réduites sont $\pm 2\omega$. Dans le cas de la pupille circulaire, la lumière directe passe toujours et, quand $2\omega < 1$, toute la lumière diffractée est aussi transmise et donne une image du même contraste que l'objet. Mais, pour résoudre la mire, il ne faut que deux raies du spectre et, en déplaçant la raie directe au bord de la pupille, on trouve deux fois le pouvoir séparateur. Dans le cas de la pupille annulaire, la lumière directe est obturée et c'est seulement la lumière diffractée qui passe lorsque $1 > 2\omega > p$. Ces deux raies produisent une image dont le pas est égal à la moitié de celui de l'objet et dont le contraste est égal à 1. Un déplacement de la source donne la même limite $\omega = 1$ que pour la pupille circulaire; nous avons aussi trouvé cette limite pour la lumière incohérente où l'on fait une intégration sur une source étendue.

Pour comparer les effets d'une obturation à ceux des aberrations, c'est la qualité Q_b de l'image qui est importante; la qualité Q_a n'est qu'un essai pour calculer la qualité de l'instrument sur les objets étendus en se référant à l'image du point. C'est pour cette raison que l'on ne peut pas employer ces résultats en lumière cohérente pour étudier les tolérances, car on ne peut pas calculer Q_b sans fond continu. Donc, une obturation centrale peut augmenter le contraste des images en lumière cohérente, mais elle ne fait aucune différence entre les objets clairs et les objets noirs.

DEUXIÈME PARTIE

L'INSTRUMENT ABERRANT

Dans cette section, nous continuerons l'étude de la pupille annulaire en calculant les effets sur l'image des aberrations et d'une obturation combinées, car l'obturation réduit non seulement la qualité de l'image mais aussi l'effet des aberrations sur cette qualité. Les résultats déjà obtenus nous ont permis de déterminer une tolérance pour l'obturation ; les résultats de cette section nous permettront de trouver les tolérances qui restent pour les aberrations.

Les méthodes que nous utiliserons sont approximatives et elles ne sont valables que dans le cas des aberrations faibles, mais nous pourrions montrer qu'elles sont assez exactes quand les aberrations sont égales ou plus petites que leurs tolérances, L'approximation que nous ferons consistera à nous servir des termes jusqu'au deuxième ordre dans le développement en série de la fonction d'aberration $e^{i\psi}$; nos calculs sur l'image d'un point sont une généralisation à la pupille annulaire de ceux de Maréchal [15] relatifs à la pupille circulaire.

D'ailleurs, les calculs de cette section sont caractérisés par l'emploi de la transformation de Fourier dans le cas des objets étendus, pour transformer l'intégrale sur l'objet en une intégrale sur la pupille.

Nous insisterons surtout sur l'application des résultats au calcul des tolérances, parce que c'est le problème le plus intéressant, mais on peut toujours s'en servir pour calculer la répartition des intensités dans l'image chaque fois que les aberrations sont assez faibles.

Formules générales. — L'aberration d'un système optique s'exprime par Δ , écart entre la surface de l'onde aberrante et une sphère de référence centrée sur l'image. Δ est une fonction des coordonnées sur la pupille et sur l'image que, suivant Nijboer [9], on peut développer en série de Fourier par rapport à l'azimut φ sur la pupille. Evidemment, la valeur de Δ dépend de la position du centre de la sphère de référence ; d'habitude, on le place au foyer paraxial. Mais Nijboer a montré l'avantage qu'il y a à prendre le centre au point où l'intensité est maxi-

mun. Pour cette valeur de Δ que nous appelons Δ , on a, dans la notation de Nijboer,

$$(2.1) \quad \overline{\Delta} = \sum b_{l n m} Y'^{2l+m} A_n^m(\rho) \cos m \varphi,$$

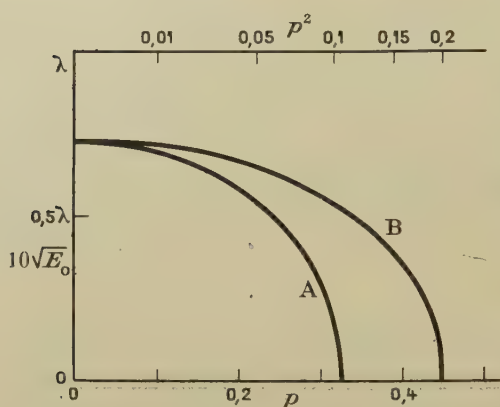


FIG. 7. — Tolérances sur $\sqrt{E_0}$.

où $b_{l n m}$ est le coefficient d'aberration et les fonctions $A_n^m(\rho)$ sont des polynômes en ρ , qui expriment les conditions d'un maximum d'intensité. Elles correspondent aux polynômes circulaires de Nijboer et de Zernike [16], $R_n^m(\rho)$, mais elles tiennent compte de l'obturation ; lorsque $\rho \rightarrow 0$, $A_n^m(\rho) \rightarrow R_n^m(\rho)$.

La notation de Nijboer est la plus commode pour le cas général, mais dans les cas particuliers nous nous servirons d'une notation plus simple. Par rapport au foyer paraxial, nous

écrivons la partie de Δ à laquelle nous nous intéressons dans ce travail sous la forme :

$$(2.2) \quad \Delta = \lambda [D\rho^2 + S_1\rho^4 + S_2\rho^6 + S_3\rho^8 + \cos \varphi - \theta (B\rho + C_1\rho^3 + C_2\rho^5) + A\rho^2 \cos 2\varphi - \theta].$$

Nous indiquons plus loin les relations entre ces coefficients et $b_{l n m}$.

La phase de l'onde incidente s'écrit $\psi = 2\pi\Delta/\lambda$ et l'approximation que nous faisons dans cette section consiste à poser

$$(2.3) \quad e^{i\psi} \simeq 1 + 2\pi i\Delta/\lambda - 2\pi^2\Delta^2/\lambda^2, \text{ au } 2^{\text{e}} \text{ ordre près en } \Delta.$$

I. — Image du point.

En présence des aberrations, l'intensité de l'image du point s'écrit :

$$I = \frac{U'^2}{4\pi^2} B \, d\sigma \left| \int_{\Delta} e^{i\psi} e^{i\rho \rho' \cos \varphi} d\alpha \right|^2,$$

et, par rapport à l'instrument parfait, la qualité est

$$Q_a = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_{\Delta} e^{i\psi} d\alpha \right|^2 \simeq \frac{1}{\pi^2} \left\{ \left[\int_{\Delta} (1 - 2\pi^2\Delta^2/\lambda^2) d\alpha \right]^2 + \left[\int_{\Delta} \frac{2\pi}{\lambda} \Delta d\alpha \right]^2 \right\}.$$

Maréchal [16] a montré que l'approximation est plus exacte si l'on se sert de la valeur moyenne de Δ sur la pupille. On trouve que cette valeur correspond au point de l'image où l'intensité est maximum; c'est-à-dire que $\bar{\Delta}$ est cette valeur moyenne, et $\int_A \bar{\Delta} d\alpha = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} Q_a &= (1 - p^2)^2 \left[1 - \frac{2 \pi^2}{\lambda^2 A} \int_A \bar{\Delta}^2 d\alpha \right]^2 \\ (2.4) \quad &= (1 - p^2)^2 \left[1 - 2 \pi^2 \frac{E_0}{\lambda^2} \right]^2, \end{aligned}$$

où A est la surface réduite de la pupille, $A = \pi (1 - p^2)$, et E_0 est le carré moyen de Δ ,

$$(2.5) \quad E_0 = \frac{1}{\pi(1-p^2)} \int_A \bar{\Delta}^2 d\alpha.$$

La valeur fournie par l'équation (2.4) est la qualité Q_a définie d'après l'équation (1.5). Si l'on envisage le point noir, on trouve

$$(2.6) \quad Q_b = (1 - p^2) [1 - 2 \pi^2 E_0 / \lambda^2]^2.$$

1. **Expressions générales des tolérances.** — D'habitude, on demande une qualité d'au moins 0,8 et, à partir de cette condition, on trouve deux séries de tolérances d'après les équations (2.4) ou (2.6); nous les appelons tolérances du type A et du type B. Elles s'expriment par

$$(2.7) \quad E_0 \leq (\lambda^2 / 2 \pi^2) [1 - \sqrt{0,8/(1 - p^2)}], \quad \text{type A,}$$

$$(2.8) \quad E_0 \leq (\lambda^2 / 2 \pi^2) [1 - \sqrt{0,8/(1 - p^2)}], \quad \text{type B.}$$

Leurs valeurs sont données par le tableau 3 et elles sont représentées sur la figure 7.

TABLEAU 3

TOLÉRANCES GÉNÉRALES DE $\sqrt{E_0} \lambda$.

p^2	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
Tolérance A	0,0731	0,0699	0,0544	0,0178	—	—
Tolérance B	0,0731	0,0716	0,0646	0,0538	0,0389	0

a) *Tolérances sur chaque aberration.* Pour calculer la qualité d'un instrument en fonction des coefficients d'aberration, on emploie l'équation (2.5) sous la forme

$$(2.9) \quad E_0 = \frac{1}{2 \pi (1 - p^2)} \int_0^{2\pi} \int_{p^2}^1 \Delta^2 dv d\varphi - \frac{1}{4 \pi^2 (1 - p^2)^2} \left[\int_0^{2\pi} \int_{p^2}^1 \Delta dv d\varphi \right]^2,$$

où $v = \rho^2$, et l'on trouve

$$(2.10) \quad E_0 = \frac{b_{1nm}^2 Y'^{4l+2m}}{2n+2},$$

d'où les tolérances :

$$(2.11) \quad b_{1nm} \leq \frac{\lambda}{\pi Y'^{2l+m}} \sqrt{n+1} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{0,8}}{1-p^2}}, \quad \text{type A,}$$

$$(2.12) \quad \leq \frac{\lambda}{\pi Y'^{2l+m}} \sqrt{n+1} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{0,8}{1-p^2}}}, \quad \text{type B.}$$

On choisit les fonctions $A_n^m(\rho)$ dans l'équation (2.1) pour satisfaire à la fois à l'équation (2.10) et à la condition $\int_{\Delta} \bar{\Delta} d\alpha = 0$.

On trouve les valeurs suivantes :

$$(2.13)$$

$$A_2^0 = \frac{2\rho^2 - (1+p^2)}{\sqrt{2}(1-p^2)}$$

$$A_4^0 = \frac{6\rho^4 - 6(1+p^2)\rho^2 + 1 + 4p^2 + p^4}{\sqrt{2}(1-p^2)^2}$$

$$A_6^0 = \frac{20\rho^6 - 30(1+p^2)\rho^4 + 12(1+3p^2+p^4)\rho^2 - (1+9p^2+9p^4+p^6)}{\sqrt{2}(1-p^2)^3}$$

$$A_8^0 = \frac{70\rho^8 - 140(1+p^2)\rho^6 + 30(3+8p^2+3p^4)\rho^4 - 20(1+6p^2+6p^4+p^6)\rho^2}{\sqrt{2}(1-p^2)^4} + \\ + \frac{1+16p^2+36p^4+16p^6+p^8}{\sqrt{2}(1-p^2)^4}$$

$$A_{11}^1 = \frac{3(1+p^2)\rho^3 - 2(1+p^2+p^4)\rho}{1-p^2} \sqrt{\frac{1+p^2}{1+4p^2+p^4}}$$

$$A_{13}^1 = \frac{10(1+4p^2+p^4)\rho^5 - 12(1+4p^2+4p^4+p^6)\rho^3 + (1+4p^2+10p^4+4p^6+p^8)\rho}{(1-p^2)^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{1+4p^2+p^4}{1+9p^2+9p^4+p^6}}$$

$$A_{21}^2 = \rho^2 \sqrt{\frac{1}{1+p^2+p^4}}.$$

Nous avons introduit dans les polynômes A_n^0 un facteur $1/\sqrt{2}$ qui n'existe pas dans ceux de Nijboer, c'est-à-dire dans ceux qui représentent un défaut de mise au point et les aberrations sphériques. Nous l'avons fait pour obtenir une forme simple de l'équation (2.10), car l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = 2\pi, \quad m = 0, \\ = \pi, \quad m \neq 0.$$

Par conséquent, les coefficients b_{1n0} sont $\sqrt{2}$ fois ceux de Nijboer.

Il nous semble probable que ces polynômes jouent le même rôle pour la pupille annulaire que les polynômes circulaires de Zernike et Nijboer dans le calcul de la répartition de l'intensité pour la pupille circulaire ; dans ce cas, les fonctions $A_n^m(\rho) \cos m\varphi$ seraient, à un facteur $1 + f(p^2)$ près, les fonctions annulaires. Mais l'étude complète de cette question est hors de l'objet de ce travail ; pour nous, ils sont une notation générale pour l'intensité centrale.

On trouve les relations suivantes entre les coefficients b_{1nm} et ceux de l'équation (2.2) :

$$\begin{aligned} b_{020} &= \lambda D(1 - p^2)/\sqrt{2} \dots\dots\dots \text{défaut de mise au point} \\ b_{040} &= \lambda S_1(1 - p^2)^2/3\sqrt{2} \dots\dots\dots \text{aberration sphérique du 3^e ordre} \\ b_{060} &= \lambda S_2(1 - p^2)^3/10\sqrt{2} \dots\dots\dots \text{aberration sphérique du 5^e ordre} \\ b_{080} &= \lambda S_3(1 - p^2)^4/35\sqrt{2} \dots\dots\dots \text{aberration sphérique du 7^e ordre} \\ b_{031} &= \frac{\lambda C_1(1 - p^2)}{3 Y'} \sqrt{\frac{1 + 4p^2 + p^4}{1 + p^2}} \dots\dots \text{coma du 3^e ordre} \\ b_{051} &= \frac{\lambda C_2(1 - p^2)^2}{10 Y'} \sqrt{\frac{1 + 9p^2 + 9p^4 + p^6}{1 + 4p^2 + p^4}} \dots\dots \text{coma du 5^e ordre} \\ b_{022} &= \lambda A\sqrt{1 + p^2 + p^4}/Y'^2 \dots\dots\dots \text{astigmatisme} \\ b_{120} &= \lambda D(1 - p^2)/\sqrt{2} Y'^2 \dots\dots\dots \text{courbure de champ.} \end{aligned}$$

Par ces formules et l'équation (2.10), on peut trouver la tolérance sur chaque aberration dans la notation de l'équation (2.2) à partir des tolérances générales sur E_0 . D'ailleurs, les coefficients des polynômes $A_n^m(\rho)$ fournissent les relations qui existent au meilleur foyer entre les aberrations des différents ordres.

2. Superposition des aberrations. — Maréchal a discuté les conditions pour que deux aberrations dans la classification de Nijboer soient indépendantes [15] ; ces conditions ne sont pas changées par une obturation de la pupille. Nous considérons le cas d'un instrument avec aberration sphérique, coma, astigmatisme et courbure de champ. Le chemin optique au meilleur foyer s'écrit :

$$(2.14) \quad \bar{\Delta} = b_{0n_1 0} A_{n_1}^0(\rho) + b_{0n_2 1} Y' A_{n_2}^1(\rho) \cos \varphi + b_{0n_3 2} Y'^2 A_{n_3}^2(\rho) \cos 2\varphi + \\ + b_{1n_4 0} Y'^2 A_{n_4}^0(\rho).$$

Puisque les effets de ces aberrations sont tous indépendants, les valeurs relatives des aberrations des différents ordres du même type sont encore indiquées par les coefficients des polynômes $A_n^m(\rho)$. D'ailleurs, les fonctions $A_n^m(\rho) \cos m\varphi$ sont orthogonales et l'on a

$$(2.15) \quad E_0 = \frac{b_{0n_10}^2}{2n_1 + 2} + \frac{b_{0n_21}^2}{2n_2 + 2} Y'^2 + \frac{b_{0n_32}^2}{2n_3 + 2} Y'^4 + \frac{b_{1n_40}^2}{2n_4 + 2} Y'^4.$$

Pour définir les tolérances, on emploie soit l'équation (2.7), soit (2.8); dans chaque cas, on trouve

$$(2.16) \quad \left[\frac{b_{0n_10}}{T_p(b_{0n_10})} \right]^2 + \left[\frac{b_{0n_21}}{T_p(b_{0n_21})} \right]^2 + \left[\frac{b_{0n_32}}{T_p(b_{0n_32})} \right]^2 + \left[\frac{b_{1n_40}}{T_p(b_{1n_40})} \right]^2 \leq 1,$$

où $T_p(b_{1nm})$ représente la tolérance sur b_{1nm} pour une pupille dont l'obturation est p si celle-ci est la seule aberration. Cette condition correspond directement à celle trouvée par Maréchal [15] pour la pupille circulaire. Si toutes les aberrations ont la même importance, chacune doit avoir une tolérance moitié de ce qu'elle vaut lorsqu'elle est seule.

Avec la notation de la formule (2.2), on a la condition analogue

$$\left[\frac{S_{n_1}}{T_p(S_{n_1})} \right]^2 + \left[\frac{C_{n_2}}{T_p(C_{n_2})} \right]^2 + \left[\frac{A_{n_3}}{T_p(A_{n_3})} \right]^2 + \left[\frac{P_{n_4}}{T_p(P_{n_4})} \right]^2 \leq 1,$$

où S_{n_1} , C_{n_2} , A_{n_3} et P_{n_4} sont les aberrations de chaque type de l'ordre le plus grand, pourvu que chacune soit corrigée par ses ordres inférieurs pour donner le maximum d'intensité.

a) *Séparation de l'obturation et des aberrations.* Pour les tolérances du type A, on peut obtenir une forme différente de l'équation (2.7) en introduisant la tolérance sur une obturation seule. On trouve :

$$(1 - p^2) \frac{E_0}{T_0(E_0)} + \left[\frac{p}{T(p)} \right]^2 \leq 1,$$

où $T_0(E_0)$ est la tolérance sur E_0 lorsque l'obturation est nulle ($\lambda^2/180$ approximativement), et $T(p)$ est la tolérance du type A sur l'obturation en l'absence d'aberrations [$T(p) = 0,325$]. Si l'on emploie la tolérance B pour $T(p)$ [$T(p) = 0,447$], cette formule nous donne une approximation très précise pour les tolérances du type B.

L'équation (2.15) nous permet d'écrire :

$$(2.17) \quad (1 - p^2) \left\{ \left[\frac{b_{0n_10}}{T_0(b_{0n_10})} \right]^2 + \left[\frac{b_{0n_21}}{T_0(b_{0n_21})} \right]^2 + \left[\frac{b_{0n_32}}{T_0(b_{0n_32})} \right]^2 + \left[\frac{b_{1n_40}}{T_0(b_{1n_40})} \right]^2 \right\} + \left[\frac{p}{T(p)} \right]^2 \leq 1,$$

où $T(p) = 0,325$ pour les tolérances A,
 $= 0,447$ pour les tolérances B.

Cette équation en termes contenant les tolérances ordinaires relatives à la pupille circulaire représente les tolérances dans leur forme la plus simple ; elle nous montre que l'on peut séparer l'obturation des aberrations et la considérer d'une façon ana-

logue si, en même temps, on multiplie les tolérances sur les aberrations par le facteur $1/\sqrt{1 - p^2}$. C'est une formule équivalente à l'équation (2.15) avec $T(p) = 0,447$ que Grey [5] a donnée ; ses calculs sont donc basés sur les tolérances du type B.

3. **Les tolérances particulières.** — Nous passons maintenant à la considération des cas de chaque aberration individuelle. En général elles présentent des formes semblables et nous n'en donnons qu'une courbe, les autres cas peuvent être calculés à partir de la tolérance générale sur E_0 .

a) *Latitude de mise au point D.* S'il existe un défaut de mise au point x' , on a

$$\Delta = U'^2 \sqrt{x'/2} = \sqrt{\lambda} \xi'/2\pi,$$

et

$$x' = 2 \lambda D/U'^2$$

où U' est l'ouverture angulaire de la pupille, mesurée à partir de l'image.

On trouve

$$(2.18) \quad E_0 = \lambda^2 D^2 (1 - p^2)^2 / 12,$$

et, à partir de là, les valeurs des tolérances représentées dans le tableau 4. Elles y sont comparées aux valeurs exactes trouvées à l'aide de l'équation (1.22).

TABLEAU 4

TOLÉRANCES SUR D

p^2	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
Tolérance A	0,253	0,245	0,198	0,068	—	—
Tolérance B	0,253	0,250	0,236	0,207	0,158	0
Tolérance B (exacte) ...	0,258	0,254	0,238	0,209	0,158	0

b) *Aberration sphérique du 3^e ordre S_1 .* Ici on a

$$\Delta = U'^2 \sqrt{x'/2} - U'^2 \sqrt{2} LA'/4$$

où LA' est la valeur de l'aberration mesurée le long de l'axe ;

$$LA' = -4\lambda S_1/U'^2.$$

On trouve que l'intensité est maximum lorsque

$$D = -S_1(1 + p^2), \quad x' = LA'(1 + p^2)/2;$$

ces conditions sont déjà exprimées par le polynôme $A_3(p)$. Pour ce maximum

$$(2.19) \quad E_0 = \lambda^2 S_1^2 (1 - p^2)^4 / 180$$

et les tolérances sont données dans le tableau 5 avec les valeurs exactes de la qualité correspondante (théoriquement 0,8 dans chaque cas) calculées pour les tolérances B par la méthode donnée plus loin.

TABLEAU 5

TOLÉRANCES SUR S_1 .

p^2	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
Tolérance A	0,981	0,957	0,809	0,293	—	—
Tolérance B	0,981	0,980	0,960	0,892	0,722	0
Qualité exacte	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	0,800

c) *Aberration sphérique du 5^e ordre* S_2 . D'habitude, on corrige l'aberration S_2 par l'aberration S_1 de telle façon que l'aberration longitudinale LA' soit nulle pour une ouverture finie $v = v_0$. On a alors

$$\Delta = \frac{U'^2}{2} \left[x'v + b \left(\frac{v_0 v^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right) \right],$$

où b est l'aberration du 5^e ordre mesurée le long de l'axe.

Dans ce cas, on a

$$x' = 2\lambda D/U'^2, \quad b = -6\lambda S_2/U'^2, \quad v_0 = -2S_1/3S_2$$

et l'on trouve que E_0 est minimum par rapport aux variations de D et S_1 lorsqu'on a

$$(2.20) \quad \begin{cases} D = 3(1 + 3p^2 + p^4)S_2/5, & x' = -b(1 + 3p^2 + p^4)/5, \\ S_1 = -3(1 + p^2)S_2/2, & v_0 = 1 + p^2, \end{cases}$$

et, dans ce cas,

$$(2.21) \quad E_0 = \lambda^2 S_2^2 (1 - p^2)^6 / 2800.$$

Pour la pupille circulaire, on corrige l'aberration au bord de la pupille ; on voit que, pour la pupille annulaire, il faut corriger à $\sqrt{1 + p^2}$ fois l'ouverture maximum.

Dans le calcul des systèmes optiques, on trouve l'aberration du 5^e ordre soit comme valeur zonale maximum de l'aberration longitudinale, soit comme ΣW , le chemin optique au foyer marginal.

(i) L'aberration longitudinale s'exprime par $LA' = b(vv_0 - v^2)$. Si l'on corrige l'aberration pour $v_0 = 1 + p^2$, elle a une valeur maximum de $(1 + p^2)b/4$ lorsque $v = (1 + p^2)/2$, et l'on calcule sa tolérance par

$$(2.22) \quad LA'_{\max} = -2(1 + p^2)S_2/3.$$

L'aberration corrigée a la même valeur bp^2 lorsque $v = p^2$ et $v = 1$, c'est-à-dire au bord de l'obturation et au bord de la pupille.

(ii) Pour corriger un système en $v_0 = 1 + p^2$, il faut calculer le rayon marginal pour cette ouverture. On calculerait donc le chemin optique pour ce foyer. Comme l'aberration y est corrigée, il est aussi le foyer paraxial et $\Sigma W = \Delta$. On obtient ainsi

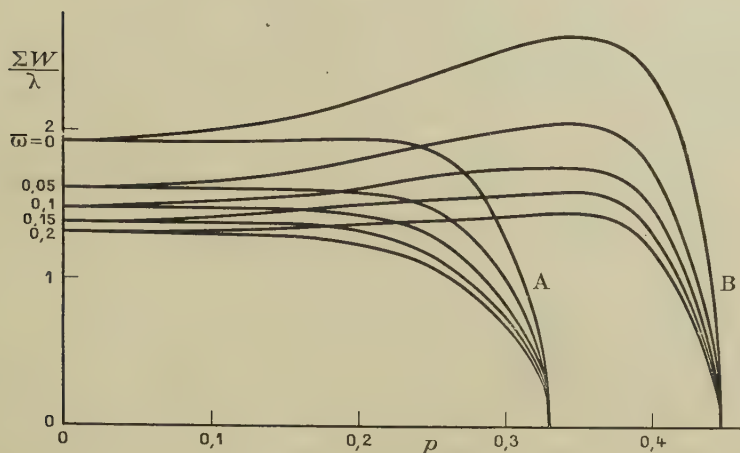
$$(2.23) \quad \Sigma W = \lambda S_2 (1 + p^2)^3 / 2; \quad v = v_0 = 1 + p^2.$$

Puisque c'est un cas dont l'importance pratique est considérable, nous présentons sur la figure 8 les tolérances sur ΣW .

(iii) Si l'on corrigeait l'aberration pour $v = 1$ comme pour la pupille circulaire, on trouverait au meilleur foyer

$$(2.24) \quad E_0 = \lambda^2 S_2^2 (1 - p^2) (1 - 2p^2 + 36p^4) / 2800$$

et, avec une aberration égale à la tolérance B, la perte de qualité de l'image est maximum quand $p^2 = 0,15$, où $Q_b = 0,75$ au lieu de 0,8. Pour les tolérances A, la perte maximum est 0,01 qui est une valeur négligeable.

FIG. 8. — Tolérances sur ΣW .

d) *Aberration sphérique du 7^e ordre S_3* . Quand on calcule les objectifs de microscope à grande ouverture, on fait varier aussi l'aberration du 5^e ordre pour corriger le résidu des aberrations des ordres supérieurs. Si ce résidu est principalement du 7^e ordre, on trouve que E_0 est maximum par rapport aux variations de D , S_1 et S_2 lorsque

$D = -2(1 + 6p^2 + 6p^4 + p^6)S_3/7$, $S_1 = 3(3 + 8p^2 + 3p^4)S_3/7$, $S_2 = -2(1 + p^2)S_3$ et ce minimum est

$$(2.25) \quad E_0 = \lambda^2 S_3 (1 - p^2)^3 / 44 \cdot 100.$$

En fonction du rayon paraxial et du rayon marginal pour $v = 1$, on a les conditions

$$(2.26) \quad \frac{\Sigma W_p}{3(3 + 8p^2 + 3p^4)} = \frac{\Sigma W_m}{2 - 4p^2 + 9p^4} = -\frac{U'^2 LA'_m}{2(2 + 3p^2 + 9p^4)} = -\frac{S_3 \lambda}{7},$$

où ΣW_p et ΣW_m sont les valeurs paraxiale et marginale du chemin optique, LA'_m l'aberration marginale et S_3 la tolérance.

Ces conditions correspondent à celles données par Richter [17] pour la pupille circulaire ; elles sont tout à fait différentes de celles de Conrady [18] qui sont basées sur une variation minimum de Δ sur la pupille. Les conditions données par Conrady pour la pupille circulaire sont $LA'_m = 0$ et $\Sigma W_m = 0$ lorsque

$$v = 2\sqrt{2} - 2 \simeq 10/11 ;$$

on peut montrer que les tolérances pour une aberration ainsi corrigée sont la moitié, à peu près, de celles calculées ici.

Les résultats de cette section sont moins dignes de confiance que ceux relatifs aux aberrations des ordres inférieurs. D'abord, il s'agit toujours d'ouvertures grandes où il faut tenir compte de l'angle d'incidence et de la polarisation ; d'ailleurs, les aberrations d'ordres supérieurs ont en général des valeurs comparables à celle du

7^e ordre. A défaut d'une connaissance plus complète, le mieux que l'on peut faire c'est se servir de ces conditions, mais ne pas employer la valeur entière de la tolérance.

e) *Coma du 3^e ordre C_1* . On exprime d'habitude la coma par $\delta g/g$, variation relative entre le grossissement marginal $g + \delta g$ et g le grossissement paraxial, ou, ce qui est équivalent, l'écart à la condition des sinus.

$$\text{On a} \quad \Delta = -U'y' \rho \cos \varphi + U'Y' \rho^3 \frac{\delta g}{g} \cos \varphi + U'^2 \rho^2 x'/2,$$

$$\text{où} \quad y' = -\lambda B/U', \quad x' = 2\lambda D/U'^2, \quad \delta g/g = \lambda C_1/U'Y'.$$

E_0 est minimum lorsque

$$\begin{aligned} D &= 0, & x' &= 0, \\ B &= -2(1 - p^6) C_1/3(1 - p^4), & y' &= 2(1 - p^6) \delta Y'/3(1 - p^4), \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \delta Y' = Y' \delta g/g.$$

On ne gagne rien par déplacement x' le long du rayon principal. Mais le maximum d'intensité est situé à une distance

$$(2.27) \quad y' = \frac{2}{3} \frac{1 - p^6}{1 - p^4} \delta Y'$$

entre l'image paraxiale en Y' et l'image marginale en $Y' + \delta Y'$.

On trouve la valeur minimum de E_0 :

$$(2.28) \quad E_0 = \frac{\lambda^2 C_1^2 (1 - p^2)^2 (1 + 4p^2 + p^4)}{72(1 + p^2)}.$$

f) *Coma du 5^e ordre C_2* . Si la coma est corrigée pour une ouverture $v = v_0$, on a

$$\Delta = -U'y' \rho \cos \varphi + a Y' \rho^3 (v - v_0) \cos \varphi,$$

$$\text{où} \quad a = \lambda C_2/Y', \quad v_0 = -C_1/C_2,$$

a représentant la coma du 5^e ordre, $\delta g/g = a v (v - v_0)/U'$.

On trouve que E_0 est minimum lorsque

$$(2.29) \quad \begin{aligned} y' &= -\frac{3 a Y'}{10 U'} \frac{1 + 4p^2 + 10p^4 + 4p^6 + p^8}{1 + 4p^2 + p^4} \\ v_0 &= \frac{6}{5} (1 + p^2) \frac{1 + 3p^2 + p^4}{1 + 4p^2 + p^4} \end{aligned}$$

et au minimum

$$(2.30) \quad E_0 = \frac{\lambda^2 C_2^2 (1 - p^2)^4 (1 + p^2) (1 + 8p^2 + p^4)}{1200 (1 + 4p^2 + p^4)}.$$

Puisqu'il n'est pas commode de calculer la coma pour une ouverture différente de celle utilisée pour l'aberration sphérique, nous chercherons les conditions pour les ouvertures $v = 1$ et $v = 1 + p^2$.

$$\text{On trouve} \quad \frac{\delta g}{g} = -\frac{\lambda C_2}{5 Y' U'} \frac{1 + 4p^2 + 19p^4 + 6p^6}{1 + 4p^2 + p^4}, \quad v = 1$$

$$\frac{\delta g}{g} = - \frac{\lambda C_2}{5 Y' U'} \frac{(1 + p^2)^2 (1 - p^2)^2}{1 + 4 p^2 + p^4}, \quad v = 1 + p^2$$

et, au troisième ordre, la valeur « paraxiale » pour la même ouverture v est

$$\left(\frac{\delta g}{g} \right)_p = - \frac{6 \lambda C_2}{5 Y' U'} \frac{1 + 3 p^2 + p^4}{1 + 4 p^2 + p^4} v (1 + p^2).$$

On a donc

(i) lorsque $v = 1$

$$(2.31) \quad \frac{(\delta g/g)_p}{6(1+p^2)(1+3p^2+p^4)} = \frac{(\delta g/g)_m}{1+4p^2+19p^4+6p^6} = - \frac{\lambda C_2}{5 Y' U' (1+4p^2+p^4)};$$

(ii) lorsque $v = 1 + p^2$

$$(2.32) \quad \frac{(\delta g/g)_p}{6(1+3p^2+p^4)} = \frac{(\delta g/g)_m}{(1-p^2)^2} = - \frac{\lambda C_2 (1+p^2)^2}{5 Y' U' (1+4p^2+p^4)}.$$

g) *Coma fonction de l'aberration sphérique.* Il existe des instruments dans lesquels la coma est nulle à toutes les ouvertures pour une certaine position de la pupille ; pour les autres positions, elle dépend de l'aberration sphérique. On peut citer l'exemple du système monocentrique dont toutes les surfaces réfléchissantes ou réfringentes sont concentriques : la coma est nulle quand la pupille est située au centre commun. Nous avons vu que l'on corrige l'aberration sphérique et la coma pour des ouvertures différentes quand elles sont indépendantes ; nous cherchons ici le meilleur compromis entre les deux ouvertures.

Pour une position arbitraire de la pupille et pour une aberration sphérique $LA' = b v (v_0 - v)$, on a

$$\Delta = \frac{U'^2}{2} \left\{ \left[x'v + b \left(\frac{v_0 v^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right) \right] + k b \cos \varphi v^{1/2} (v v_0 - v^2) \right\} - U' y' \rho \cos \varphi,$$

où k est une constante qui dépend du champ de l'instrument et du déplacement de la pupille par rapport à la position sans coma.

On trouve que E_0 est minimum quand

$$(2.33) \quad \frac{v_0}{1+p^2} = \frac{1+6\varpi_m(1+3p^2+p^4)}{1+5\varpi_m(1+4p^2+p^4)},$$

où $\varpi = \frac{2k^2}{(1-p^2)^2(1+p^2)}$ et $\varpi = \varpi_m$ au bord du champ.

On obtient ainsi la tolérance sur b en fonction de ϖ_m , valeur maximum de ϖ au bord de champ où la perte de contraste est la plus sérieuse. On trouve que la tolérance sur ΣW de la figure 8 doit être multipliée par

$$(2.34) \quad \left(\frac{v_0}{1+p^2} \right)^3 \left[1 + \frac{35}{2} (1+p^2)^2 \varpi_m \frac{1+3\varpi_m(1+8p^2+p^4)}{1+5\varpi_m(1+4p^2+p^4)} \right]^{-1/2},$$

où v_0 a la valeur donnée par l'équation (2.33). Dans la figure 8, nous présentons les tolérances pour ϖ_m allant de 0 jusqu'à 0,2.

Les résultats de cette section redonnent ceux correspondant au cas de l'aberration sphérique quand $\varpi_m = 0$, et à celui de la coma quand $\varpi_m \rightarrow \infty$.

h) *Astigmatisme A*. On considère en même temps l'astigmatisme et la courbure de champ ; celle-ci s'exprime de la même façon qu'un défaut de mise au point. Au meilleur foyer on trouve la tolérance

$$(2.35) \quad D^2 + 2A^2 \frac{1 + p^2 + p^4}{(1 - p^2)^2} \leq [T_p(D)]^2,$$

où $T_p(D)$ est la tolérance de mise au point.

Si les abscisses des focales par rapport à l'image axiale sont s et t ,

$$\Delta = - \frac{U'^2 v}{2} \left(\frac{t + s}{2} + \frac{t - s}{2} \cos 2\varphi \right).$$

Nous obtenons ainsi une autre expression pour la tolérance :

$$(2.36) \quad (t + s)^2 + 2(t - s)^2 \frac{1 + p^2 + p^4}{(1 - p^2)^2} \leq \frac{16 \lambda^2}{U'^4} [T_p(D)]^2.$$

4. **Précision des formules.** — Evidemment, toute la simplicité de la méthode approximative serait perdue si l'on devait contrôler chaque valeur par un calcul exact. Mais on peut obtenir une idée générale de l'exactitude en calculant l'erreur dans quelques cas simples. Ici nous faisons une comparaison entre les formules exactes de la première section et celles de cette section.

Nous calculons l'erreur au moyen du terme du 4^e ordre de l'aberration ; comme celui du 6^e ordre est du signe opposé, notre calcul fournit la limite supérieure de l'erreur.

a) *Défaut de mise au point*. Dans le tableau 4, nous avons présenté les tolérances exactes calculées par l'équation (1.22). On voit que les erreurs sont, au maximum, deux pour cent de la tolérance. On obtient l'erreur sur la qualité en remplaçant ξ' dans l'équation (1.22) par $2\pi D$; on trouve

$$Q_b = (1 - p^2) [1 - \pi^2(1 - p^2)^2 D^2/3 + 2\pi^4(1 - p^2)^4 D^4/35 - \pi^6(1 - p^2)^6 D^6/315 + \dots]$$

et les équations (2.6) et (2.18) nous donnent

$$Q_b \simeq (1 - p^2) [1 - \pi^2(1 - p^2)^2 D^2/3 + \pi^4(1 - p^2)^4 D^4/36].$$

L'erreur s'exprime approximativement par

$$\delta Q/Q_0 \simeq \pi^4(1 - p^2)^4 D^4/60, \quad Q_0 = 1 - p^2,$$

et elle est moindre que 0,01 si l'on a

$$D < 0,280/(1 - p^2) \quad \text{ou} \quad Q > 0,74(1 - p^2).$$

On voit l'avantage de la formule (2.4) de Maréchal qui tient compte en partie du terme du 4^e ordre. Une formule au 2^e ordre seulement donnerait les limites

$$D < 0,219/(1 - p^2), \quad Q > 0,84 (1 - p^2).$$

b) *Aberration sphérique du 3^e ordre.* Le résultat exact dans ce cas a été donné par Steward [3, 4]. Utilisant notre notation, on a

$$Q = \frac{1}{4 S_1 (1 - p^2)} \left\{ \left[\mathbf{C} \left(\frac{D + 2S_1}{\sqrt{S_1}} \right) - \mathbf{C} \left(\frac{D + 2p^2 S_1}{\sqrt{S_1}} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\mathbf{S} \left(\frac{D + 2S_1}{\sqrt{S_1}} \right) - \mathbf{S} \left(\frac{D + 2p^2 S_1}{\sqrt{S_1}} \right) \right]^2 \right\}$$

où $\mathbf{C}(x)$ et $\mathbf{S}(x)$ sont les intégrales de Fresnel.

(i) Au meilleur foyer, $D = -S_1 (1 - p^2)$ et l'on trouve

$$Q = (1 - p^2) \left[1 - \frac{\pi^2 (1 - p^2)^4 S_1^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{\pi^4 (1 - p^2)^8 S_1^4}{1 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{\pi^6 (1 - p^2)^{12} S_1^6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots \right]$$

tandis que la formule approximative nous donne

$$Q \simeq (1 - p^2) \left[1 - \frac{\pi^2 (1 - p^2)^4 S_1^2}{45} + \frac{\pi^4 (1 - p^2)^8 S_1^4}{8 \cdot 100} \right]$$

avec l'erreur $\delta Q/Q_0 \simeq \pi^4 (1 - p^2)^8 S_1^4 / 41 \, 340$.

Cette erreur est inférieure à 0,01 lorsque

$$S_1 < 1,04/(1 - p^2)^2 \quad \text{ou} \quad Q > 0,76 (1 - p^2).$$

(ii) Quand $D = 0$, sans obturation, on a

$$Q = 1 - 16 \pi^2 S_1^2 / 45 + 256 \pi^4 S_1^4 / 4 \, 725 - \dots$$

et $Q \simeq 1 - 16 \pi^2 S_1^2 / 45 + 64 \pi^4 S_1^4 / 2 \, 025$.

Donc $\delta Q/Q_0 \simeq 64 \pi^4 S_1^4 / 2 \, 835$
 $< 0,01$ lorsque $S_1 < 0,260$ ou $Q > 0,76$.

On voit que l'erreur est inférieure à 1 % pour une aberration moindre que $\lambda/4$, si elle est seule, ou moindre que sa tolérance, si elle est corrigée. En fonction de l'intensité, les formules ont cette exactitude pour Q entre 0,76 et 1 ; Maréchal [15] a trouvé un résultat semblable.

Pour la pupille annulaire, les intervalles sont plus étendus ; une qualité comprise entre $0,76 (1 - p^2)$ et $(1 - p^2)$, ou jusqu'à $(1 - p^2)^{n/2}$ fois l'aberration corrigée admissible pour la pupille circulaire, où n est l'ordre de l'aberration. Ce résultat est assez important : tandis que les formules approximatives ne sont plus valables quand l'aberration de la pupille circulaire dépasse sa tolérance, elles sont valables jusqu'à plusieurs fois cette valeur pour les obturations importantes.

c) *Aberration sphérique du 5^e ordre.* Pour terminer cette étude de la précision des formules, nous présentons dans le tableau 6 des résultats calculés par Steward [3] pour le cas $v_0 = 1$, $S_1 = -3 S_2/2$ et une pupille circulaire.

TABLEAU 6

QUALITÉ EXACTE, ABERRATION S_2						
D		0	1	1,25	1,5	2
$S_2 = 2$	Q exacte	0,0776	0,8244	0,9378	0,7093	0,0912
	Q approx.	—	0,821	0,936	0,679	—
D		2	2,25	2,5	3	
$S_2 = 4$	Q exacte	0,4674	0,7336	0,7778	0,2878	
	Q approx.	0,389	0,723	0,762	0,087	

L'erreur est encore inférieure à 1 % dans tous les cas où $Q > 0,76$. La valeur 4 est la tolérance sur S_2 et les résultats pour cette valeur ne sont exacts que près du meilleur foyer où $D = 2,4$.

II. — Image de la ligne

Nous pouvons étudier les images des objets étendus en lumière incohérente de deux façons; dans la première partie, nous avons considéré tous les points de l'objet lumineux comme indépendants et nous avons calculé l'intensité centrale de son image en faisant l'intégration de l'image du point sur l'objet. Pour l'instrument parfait, nous avons trouvé les résultats assez facilement, mais, en présence des aberrations, l'intégration de la tache devient, en général, très compliquée.

Mais nous pouvons regarder l'objet en lumière incohérente comme un écran d'amplitude éclairé par une source infinie incohérente. Chaque point de la source produit sur la pupille un phénomène de diffraction, le spectre de l'objet, et l'éclairement de l'image s'exprime par l'intensité de ce spectre transmise par la pupille et intégrée sur la source. En pratique, on considère la source comme étant dans le plan de la pupille et l'intégration sur l'objet est remplacée par une intégration sur la pupille. Puisque l'aberration s'exprime directement en coordonnées de la pupille, elle entre dans les calculs d'une façon plus simple que précédemment.

C'est dans cette méthode de calcul que l'on fait intervenir la transformation de Fourier. L'amplitude au point central de l'image due au point (y, z) de l'objet s'écrit

$$F'(y, z) = \frac{b U U'}{\lambda} \int_{\Lambda} e^{i\psi} e^{-i\beta\gamma} e^{-i\gamma\zeta} d\beta d\gamma.$$

En définissant la fonction $g(\beta, \gamma) = e^{i\psi}$ sur la pupille
 $= 0$ ailleurs,

on a

$$f'(\eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta, \gamma) e^{-i\beta\eta} e^{-i\gamma\zeta} d\beta d\gamma,$$

où f' est proportionnel à l'amplitude F' à un facteur constant près,

$$F'(y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} b U U' f'(\eta, \zeta).$$

Donc $f'(\eta, \zeta) = \mathbf{T}[g(\beta, \gamma)]$, la transformée de $g(\beta, \gamma)$, où nous avons employé

la forme donnée par Duffieux ([6] page 91), pour éviter le facteur 2π dans l'indice. L'amplitude de l'image f' et le spectre sur la pupille g sont liés par la transformation de Fourier et l'on peut utiliser les théorèmes de cette transformation pour changer le plan d'intégration.

Dans les calculs qui suivent, les cas de la ligne et de la mire sinusoïdale se résolvent plus facilement par une application de ce principe ; les spectres se réduisent à une ligne et à deux points respectivement. Mais, dans le cas des disques circulaires, le calcul se fait plus rapidement par des intégrations directes sur l'objet.

1. **Calcul général pour la ligne.** — L'amplitude en $(0,0)$ due à un objet ponctuel en $(0,z)$ s'écrit

$$F'(z) = \frac{b UU'}{\lambda} \int_A e^{i\psi} e^{-i\gamma z} d\alpha,$$

et l'intensité centrale de l'image de la droite $y = 0$ est

$$L' = \int_{-\infty}^{+\infty} |F'(z)|^2 dz = \frac{B U'^2 d\eta}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \left| \int_A e^{i\psi} e^{-i\gamma z} d\alpha \right|^2.$$

a) *Transformation de Fourier.* En posant

$$G(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta, \gamma) d\beta,$$

on a

$$F'(z) = \frac{\sqrt{2\pi} b UU'}{\lambda} f'(\zeta),$$

où

$$f'(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\gamma) e^{-i\gamma \zeta} d\gamma$$

= $T[G(\gamma)]$, la transformée de Fourier de $G(\gamma)$.

Le théorème de Plancherel nous permet d'écrire :

$$L' = \frac{B U'^2 d\eta}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\gamma)|^2 d\gamma;$$

nous avons ainsi remplacé l'intégration sur l'objet par une intégration sur la pupille.

Nous avons montré que, lorsqu'il n'y a pas d'aberrations,

$$L'(0) = 8 B U'^2 d\eta / 3\pi;$$

par suite la qualité de l'image s'écrit

$$Q_a = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\gamma)|^2 d\gamma, \quad Q_b = Q_a / (1 - p^2).$$

b) *Etendue d'intégration.* On a

$$G(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta, \gamma) d\beta$$

$$G(\gamma) = \begin{cases} 0 & , |\gamma| \geq 1, \\ \int_{-\sqrt{1-\gamma^2}}^{+\sqrt{1-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta & , 1 > |\gamma| \geq p, \\ \int_{-\sqrt{1-\gamma^2}}^{+\sqrt{1-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta - \int_{-\sqrt{p^2-\gamma^2}}^{+\sqrt{p^2-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta, & p > |\gamma|. \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} Q_a &= \frac{3}{16} \left\{ \int_p^1 d\gamma \left| \int_{-\sqrt{1-\gamma^2}}^{+\sqrt{1-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta \right|^2 + \int_{-p}^{-1} d\gamma \left| \int_{-\sqrt{1-\gamma^2}}^{+\sqrt{1-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta \right|^2 \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\sqrt{p^2-\gamma^2}}^{+\sqrt{p^2-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta \right|^2 + \int_{-1}^{-p} d\gamma \left| \int_{-\sqrt{1-\gamma^2}}^{+\sqrt{1-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta \right|^2 \right\} \\ &= \frac{3}{16} \left\{ \int_{-1}^{+1} d\gamma \left| \int_{-\sqrt{1-\gamma^2}}^{+\sqrt{1-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta \right|^2 + \int_{-p}^{+p} d\gamma \left| \int_{-\sqrt{p^2-\gamma^2}}^{+\sqrt{p^2-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta \right|^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{-p}^{+p} d\gamma \left| \int_{-\sqrt{1-\gamma^2}}^{+\sqrt{1-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta \right| \left| \int_{-\sqrt{p^2-\gamma^2}}^{+\sqrt{p^2-\gamma^2}} e^{i\psi} d\beta \right| \right\}. \end{aligned}$$

c) *Grandeur de la source.* La fonction $G(\gamma)$ représente la répartition d'amplitude dans le spectre de la droite qui est lui-même une droite parallèle à l'axe des γ . Puisque $g(\beta, \gamma)$ est nul à l'extérieur de la pupille, l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ se réduit à une intégrale de $\gamma = -1$ à $\gamma = +1$: toutes les sources qui sont rectangulaires et aussi grandes que la pupille dans la dimension des γ produisent l'effet de lumière incohérente. Mais, pour les sources plus petites, on trouve des résultats qui se rapprochent de ceux qu'on obtient en lumière cohérente où la source est ponctuelle ; on a une cohérence partielle.

d) *Calcul approximatif.* En posant $\psi = 2\pi \Delta/\lambda$,

$e^{i\psi} \simeq 1 + 2\pi i \Delta/\lambda - 2\pi^2 \Delta^2/\lambda^2$ au 2^e ordre, et l'on trouve

$$Q_a = 1 + p^3 + (1 - p^2) K - (1 + p^2) E$$

$$\begin{aligned} & - \frac{6\pi^2}{\lambda^2} \left\{ \int_0^1 d\gamma \left[\sqrt{1-\gamma^2} \int_0^{\sqrt{1-\gamma^2}} \Delta^2 d\beta - \left(\int_0^{\sqrt{1-\gamma^2}} \Delta d\beta \right)^2 \right] \right. \\ & \quad \left. + \int_0^p d\gamma \left[\sqrt{p^2-\gamma^2} \int_0^{\sqrt{p^2-\gamma^2}} \Delta^2 d\beta - \left(\int_0^{\sqrt{p^2-\gamma^2}} \Delta d\beta \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$- \int_0^p d\gamma \left[\sqrt{1-\gamma^2} \int_0^{\sqrt{p^2-\gamma^2}} \Delta^2 d\beta + \sqrt{p^2-\gamma^2} \int_0^{\sqrt{1-\gamma^2}} \Delta^2 d\beta - \right. \\ \left. - 2 \left(\int_0^{\sqrt{1-\gamma^2}} \Delta d\beta \right) \left(\int_0^{\sqrt{p^2-\gamma^2}} \Delta d\beta \right) \right] .$$

Pour ce calcul, on a besoin des intégrales

$$I_n(p) = \int_0^p x^{2n} \sqrt{1-x^2} \sqrt{p^2-x^2} dx.$$

On trouve que

$$I_n = \frac{2n(1+p^2)}{(2n+3)p^2} I_{n-1} + \frac{(2n-3)p^2}{2n+3} I_{n-2},$$

et
$$I_0 = \frac{1}{3} [(1+p^2) E - (1-p^2) K],$$

$$I_1 = \frac{1}{15} [2(1-p^2+p^4) E - (2-3p^2+p^4) K].$$

Comme s'il s'agissait des faibles valeurs de p , nous avons développé ces intégrales en série par rapport à p ; gardant tous les termes jusqu'à ceux en p^8 , on a

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \left(p^2 - \frac{1}{8} p^4 - \frac{1}{64} p^6 - \frac{5}{1024} p^8 - \dots \right),$$

$$I_1 = \frac{\pi}{16} \left(p^4 - \frac{1}{4} p^6 - \frac{5}{128} p^8 - \dots \right),$$

$$I_2 = \frac{\pi}{32} \left(p^6 - \frac{5}{16} p^8 - \dots \right),$$

$$I_3 = \frac{5\pi}{128} (p^8 - \dots).$$

On met Δ sous la forme (2.2), θ étant l'angle entre la ligne et la direction sagittale; $\theta = \pi/2$ quand la ligne est radiale. Dans ces conditions, on trouve

$$Q_a = 1 - 2,35619 p^2 + p^3 - 0,29452 p^4 - 0,03682 p^5 - 0,01150 p^8 \dots$$

$$- (D^2 - 2AD \cos 2\theta + A^2 \cos^2 2\theta)$$

$$\times (2,4063 - 9,3019 p^2 + 13,5653 p^4 - 9,9317 p^6 + 2,4063 p^7 + 0,7721 p^8 \dots)$$

$$(2.39) \quad - 2DS_1 \quad (2,3681 - 6,6442 p^2 + 3,4882 p^4 + 5,7329 p^6 - 8,2209 p^8 \dots)$$

$$- S_1^2 \quad (2,5139 - 5,1677 p^2 - 0,8305 p^4 + 5,7653 p^6 + 1,9631 p^8 \dots)$$

$$- 2DS_2 \quad (2,1077 - 5,1677 p^2 + 2,4916 p^4 + 0,3392 p^6 + 4,0423 p^8 \dots)$$

$$- 2S_1S_2 \quad (2,3458 - 4,2281 p^2 - 0,6460 p^4 + 1,9033 p^6 + 2,6797 p^8 \dots)$$

$$- S_2^2 \quad (2,2608 - 3,5776 p^2 - 0,5285 p^4 - 0,2422 p^6 + 3,1599 p^8 \dots)$$

$$- B^2 \cos^2 \theta \quad (10,5276 - 15,5032 p^2 - 9,6895 p^4 + 10,5276 p^6 + 1,2111 p^8 + 0,0152 p^8 \dots)$$

$$- 2BC_1 \cos^2 \theta \quad (6,9205 - 9,3019 p^2 + 1,9379 p^4 - 7,8001 p^6 + 6,9205 p^7 + 0,7418 p^8 \dots)$$

$$- C_1^2 \cos^2 \theta \quad (5,1420 - 6,6442 p^2 + 1,1627 p^4 + 0,2422 p^6 - 5,8634 p^8 \dots)$$

$$- C_1^2 \sin^2 \theta \quad (0,2674 - 2,3255 p^4 + 4,1988 p^6 - 2,8160 p^8 \dots)$$

$$- A^2 \sin^2 2\theta \quad (6,0158 - 15,5047 p^4 + 3,8762 p^6 + 6,0158 p^7 - 0,7268 p^8 \dots).$$

2. **Résultats particuliers.** — a) *Défaut de mise au point.* Quand D est égal aux tolérances trouvées pour le point, on a les valeurs du tableau 7 pour Q_b , le contraste de la ligne noire.

TABLEAU 7

IMAGE DE LA LIGNE. DÉFAUT DE MISE AU POINT

p^2	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
Q_b — tol. A	0,846	0,847	0,860	0,880	—	—
Q_b — tol. B	0,846	0,841	0,825	0,811	0,799	0,788

b) *Aberration sphérique du 3^e ordre.* On trouve que la qualité est maximum quand

$D = -S_1(0,9841 + 1,043 p^2 - 0,066 p^4 + 0,309 p^6 - 0,984 p^7 + 5,09 p^8 \dots)$,
résultat comparable à la valeur $D = -S_1(1 + p^2)$ trouvée pour le point. Au meilleur foyer, on a

$(1 - p^2) Q_b = Q_0(p) - S_1(0,1834 - 1,099 p^2 + 2,826 p^4 - 4,023 p^6 + 2,331 p^7 - 1,271 p^8 \dots)$,

où $Q_0(p) = 1 - 2,35619 p^2 + p^3 - 0,29452 p^4 - 0,03682 p^6 - 0,01150 p^8 \dots$;

les valeurs de Q_b sont données dans le tableau 8.

TABLEAU 8

IMAGE DE LA LIGNE — S_1 .

p^2	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
Q_b — tol. A	0,824	0,827	0,848	0,878	—	—
Q_b — tol. B	0,824	0,819	0,810	0,799	0,792	0,788

c) *Aberration sphérique du 5^e ordre.* On trouve que la qualité est maximum quand

$D = S_2(0,5813 + 1,844 p^2 + 0,475 p^4 + 1,654 p^6 - 7,97 p^7 + 21,78 p^8 \dots)$

$v_0 = 0,987 + 1,042 p^2 - 0,117 p^4 + 1,136 p^6 - 5,004 p^7 + 12,25 p^8 \dots$

Pour le point, nous avons trouvé

$D = S_2(0,6 + 1,8 p^2 + 0,6 p^4)$, $v_0 = 1 + p^2$.

Si l'on pose $v_0 = 1 + p^2$, la qualité maximum s'écrit

$(1 - p^2) Q_b = Q_0(p) - S_2(0,0126 - 0,101 p^2 + 0,370 p^4 - 1,00 p^6 + 0,87 p^7 + 0,65 p^8)$

d'où les valeurs du tableau 9.

TABLEAU 9

IMAGE DE LA LIGNE — S_2

p^2	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
Q_b — tol. A	0,81	0,82	0,84	0,88	—	—
Q_b — tol. B	0,81	0,81	0,80	0,80	0,79	0,79

d) *Coma du 3^e ordre.* L'intensité est maximum quand

$B = -C_1(0,6574 + 0,07181 p^2 + 0,7024 p^4 - 0,6574 p^5 + 0,6050 p^6 +$
 $+ 1,541 p^7 + 1,795 p^8 \dots)$;

pour le point : $B = -\frac{2}{3} C_1 (1 + p^4 - p^6 p^8 + \dots)$.

La valeur maximum est

$$(1 - p^2) Q_b = Q_0(p) - C_1^2 \cos^2 \theta (0,5927 - 1,114 p^2 - 5,647 p^4 + 4,549 p^5 + \\ + 9,506 p^6 - 7,93 p^7 - 20,45 p^8 \dots) \\ - C_1^2 \sin^2 \theta (0,2674 - 2,326 p^4 + 4,199 p^6 - 2,82 p^8 \dots).$$

La qualité est évaluée dans le tableau 10 ; on voit que l'effet de la coma est plus important quand $\theta = 0$ et que l'axe de la coma est perpendiculaire à la ligne.

TABLEAU 10

IMAGE DE LA LIGNE — C_1

p^2	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20
Q_b — tol. A $\theta = 0$	0,77	0,78	0,83	0,88	—	—
$\theta = \pi/2$	0,90	0,90	0,89	0,88	—	—
Q_b — tol. B $\theta = 0$	0,77	0,77	0,78	0,79	0,79	0,79
$\theta = \pi/2$	0,90	0,89	0,86	0,83	0,81	0,79

e) *Astigmatisme et courbure de champ*. — (i) Astigmatisme seul. Lorsque $\theta = 0$ ou $\pi/2$, la qualité de l'image est égale à celle due à un défaut de mise au point de la même valeur. Mais lorsque $\theta = \pm \pi/4$, la baisse est plus sérieuse ; l'image du point n'est pas radialement symétrique mais elle approche d'une forme carrée ainsi que l'a montré Nijboer [9].

(ii) Qualité aux focales. Quand la focale est parallèle à l'objet, $D = A$, $\theta = 0$ ou $D = -A$, $\theta = \pi/2$, l'astigmatisme n'occasionne aucune perte de qualité ainsi que l'a montré Maréchal [15]. Ce résultat, évident du point de vue de l'optique géométrique, est un peu étonnant en optique physique ; il signifie que la surface de section centrale du solide de diffraction par un plan parallèle à la focale est indépendante de la valeur de l'astigmatisme.

Quand la focale est perpendiculaire à l'objet, la perte de qualité est 2 fois celle qu'on a au point situé au milieu des deux focales.

3. **Précision des résultats.** — On peut contrôler ces résultats pour la ligne dans le cas d'un défaut de mise au point avec pupille circulaire en se servant de la formule (1.23) qui donne l'intensité de l'image d'une ligne le long de l'axe.

En remplaçant ξ' par $2\pi D$, on a

$$Q = 1 - 2,4063 D^2 + 2,9244 D^4 - 1,9873 D^6 + \dots$$

et l'erreur que l'on fait en employant les termes jusqu'au 2^e ordre en D seulement est $\delta Q/Q \simeq 2,9244 D^4$ et $\delta Q/Q = 0,01$, lorsque $D < 0,24$ ou $Q > 0,86$.

En tenant compte du terme en D^6 , on peut dire que l'erreur est inférieure à 1 % jusqu'à la tolérance. Il est probable que ceci est encore vrai pour les autres aberrations et que l'erreur diminue quand la pupille est obturée.

4. **Effets des tolérances.** — Dans tous les cas, sauf celui de la coma perpendiculaire à la ligne, la qualité baisse quand on augmente l'obturation pour les tolérances B et elle augmente pour les tolérances A. Pour obtenir pour toutes les valeurs de l'obturation une qualité égale à celle fournie par l'instrument sans obturation, il faut choisir des tolérances comprises entre les deux.

III. — La mire infinie

Comme autre exemple d'objet pour une étude complète, nous examinons maintenant celui de la mire sinusoïdale ; comme nous l'avons déjà montré, les résultats s'appliquent facilement à toutes les mires périodiques.

1. **Méthode de calcul.** — a) L'intensité de l'image de la ligne $\eta = \eta$ est donnée par

$$L' = BU'^2 d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\eta, \zeta)|^2 d\zeta$$

et celle d'une mire sinusoïdale dont la luminance s'exprime par

$$B = B_c + B_v e^{2i\omega\eta}$$

est donnée par

$$M' = B_c U'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\beta, \gamma)|^2 d\beta d\gamma + B_v U'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\omega\eta} |f'(\eta, \zeta)|^2 d\eta d\zeta.$$

Duffieux [6] a montré que, si $f'(\eta, \zeta)$ est la transformée de $g(\beta, \gamma)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta_1\eta + i\gamma_1\zeta} |f'(\eta, \zeta)|^2 d\eta d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta, \gamma) g^*(\beta - \beta_1, \gamma - \gamma_1) d\beta d\gamma,$$

où g^* est la fonction imaginaire conjuguée de g .

Ici, on a $\beta_1 = 2\omega$, $\gamma_1 = 0$ et, par conséquent,

$$M' = \pi(1 - p^2) B_c U'^2 + B_v U'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta, \gamma) g^*(\beta - 2\omega, \gamma) d\beta d\gamma.$$

A partir de ce résultat relatif à une mire complexe, nous pouvons étudier l'image de la mire $B = B_c + B_v \cos 2\omega\eta$. Son image est toujours sinusoïdale et, par conséquent, l'intensité maximum est donnée par le module de cette intégrale. Le contraste C'_0 de l'image d'un objet de contraste 1, tel qu'il a été défini dans la première partie, est donc

$$C'_0 = \frac{1}{\pi(1 - p^2)} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta, \gamma) g^*(\beta - 2\omega, \gamma) d\beta d\gamma \right|.$$

On peut calculer le maximum d'intensité à partir de la valeur réelle de l'intégrale, ce qui représente l'intensité centrale de l'image. Les deux formules sont identiques dans les cas de l'aberration sphérique et de l'astigmatisme mais, dans le cas de la coma, il faut tenir compte des effets d'un déplacement latéral du point

d'observation de l'image pour trouver le maximum d'intensité qui n'est plus la valeur centrale.

Bien que cette méthode soit moins directe, nous nous en servons ici parce que l'on peut éviter une différence dans les formules suivant les cas où il y a de la coma ou non ; en tous cas, les calculs numériques sont analogues. Pour cette méthode, le contraste s'exprime par

$$C' = \frac{1}{\pi(1-p^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R \left\{ g(\beta, \gamma) g^*(\beta - 2\omega, \gamma) \right\} d\beta d\gamma,$$

où $R(z)$ est la partie réelle de z .

b) *Etendue des intégrations.* Pour définir les régions d'intégrations, nous nous servons de la notation de l'algèbre de Boole. On a

$$\begin{aligned} g(\beta, \gamma) &= e^{i\psi} && \text{sur } A, \text{ la pupille} \\ g(\beta, \gamma) &= 0 && \text{sur } \mathcal{C}(A), \text{ le complément de } A, \\ g(\beta - 2\omega, \gamma) &= e^{-i\psi'} && \text{sur } A' \\ &= 0 && \text{sur } \mathcal{C}(A'), \end{aligned}$$

où la région A dénote la pupille, et A' dénote une surface semblable déplacée d'une distance 2ω dans la direction de β ; $\psi' = \psi(\beta - 2\omega, \gamma)$.

Donc, le produit $g(\beta, \gamma)g^*(\beta - 2\omega, \gamma) = e^{i(\psi - \psi')}$ sur $A \times A'$,
 $= 0$ ailleurs,

$A \times A'$ étant la région commune à A et A' et

$$R \left\{ g(\beta, \gamma) g^*(\beta - 2\omega, \gamma) \right\} = \cos(\psi - \psi') \quad \text{sur } A \times A'.$$

Ainsi,

$$C'_0 = \frac{1}{\pi(1-p^2)} \iint_{A \times A'} \cos(\psi - \psi') d\beta d\gamma.$$

Pour une pupille annulaire, on peut exprimer A comme une pupille circulaire P moins une obturation p ; on a les définitions :

$$\begin{aligned} P &\text{ est la région } \beta^2 + \gamma^2 = 1, & P' &\text{ la région } (\beta - 2\omega)^2 + \gamma^2 = 1, \\ p &\text{ la région } \beta^2 + \gamma^2 = p^2, & p' &\text{ la région } (\beta - 2\omega)^2 + \gamma^2 = p^2, \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad A \times A' = P \times P' - P \times p' - P' \times p + p \times p'.$$

(1) L'intégration sur $P \times P'$ (fig. 9) nous redonne le cas de la pupille circulaire. Quand $\omega \geq 1$, $P \times P'$ disparaît et le contraste est nul.

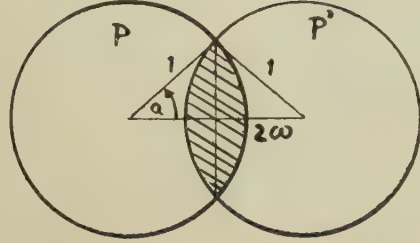


FIG. 9. — Région d'intégration pour la pupille circulaire.

Quand $\omega < 1$,

$$\begin{aligned} \pi C'_0 &= \int_{-a}^{+a} d\varphi \int_{\frac{\cos a}{\cos \varphi}}^1 \cos(\psi - \psi') \rho \, d\rho + \int_{\pi-a}^{\pi+a} d\varphi' \int_{-\frac{\cos a}{\cos \varphi'}}^1 \cos(\psi - \psi') \rho' \, d\rho' \\ &= \int_{-a}^{+a} d\varphi \int_{\frac{\cos a}{\cos \varphi}}^1 \cos(\psi - \psi') \rho \, d\rho + \int_{-a}^{+a} d\chi \int_{\frac{\cos a}{\cos \chi}}^1 \cos(\psi - \psi') \rho' \, d\rho', \end{aligned}$$

où ρ' et φ' sont les coordonnées polaires pour A' , $\cos a = \omega$ et $\chi = \pi - \varphi'$.

Au 2^e ordre près en Δ , $\cos(\psi - \psi') = 1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} (\Delta - \Delta')^2$ et, en fonction des aberrations,

$$\begin{aligned} (2.41) \quad \Delta - \Delta' &= 2\omega \{ 2(\rho \cos \varphi - \omega) [D^2 + 2S_1(\rho^2 - 2\rho\omega \cos \varphi + 2\omega^2) + \\ &\quad + S_2(3\rho^4 - 12\rho^3\omega \cos \varphi + 12\rho^2\omega^2 + 16\rho^2\omega^2 \cos^2 \varphi - 32\rho\omega^3 \cos \varphi + \\ &\quad + 16\omega^4) + C_1\rho \cos \varphi - \theta] + B \cos \theta + C_1 \cos \theta(\rho^2 - 4\rho\omega \cos \varphi + \\ &\quad + 4\omega^2) + A \cos \theta(\rho \cos \varphi - \theta - \omega \cos \theta) \}. \end{aligned}$$

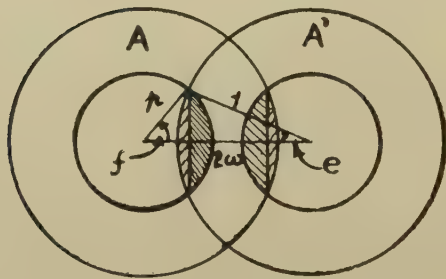


FIG. 10. — Régions d'intégration pour la pupille annulaire.

et, au 2^e ordre près,

$$C' = \frac{2}{\pi} (a - \sin a \cos a) - \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_{-a}^{+a} d\varphi \int_{\frac{\cos a}{\cos \varphi}}^1 (\Delta - \Delta')^2 \rho \, d\rho.$$

On trouve que les produits entre B et C_1 et les autres aberrations disparaissent également sur les autres régions d'intégration.

(ii) L'intégration sur $p \times p'$ est identique. Quand $\omega \geq p$, le contraste est nul. Quand $\omega < p$,

$$(1 - p^2) \delta C'_0 = \frac{2p^2}{\pi} (b - \sin b \cos b) - \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_{-b}^{+b} d\varphi \int_{\frac{p \cos b}{\cos \varphi}}^p (\Delta - \Delta')^2 \rho \, d\rho,$$

où $\cos b = \omega/p$.

(iii) Les intégrations sur $P \times p'$ et $P' \times p$. Les deux régions sont montrées sur la figure 10.

Quand $2\omega \geq 1 + p$, le contraste est nul. Quand $1 + p > 2\omega > 1 - p$, on a

$$\pi(1-p^2) \delta C'_0 = - \int_{-e}^{+e} d\varphi \int_{\frac{\cos e}{\cos \varphi}}^1 \cos(\psi - \psi') \rho d\rho - \int_{-f}^{+f} d\varphi \int_{\frac{p \cos f}{\cos \varphi}}^p \cos(\psi - \psi') \rho d\rho \\ - \int_{-e}^{+e} d\chi \int_{\frac{\cos e}{\cos \chi}}^1 \cos(\psi - \psi') \rho' d\rho' - \int_{-f}^{+f} d\chi \int_{\frac{p \cos f}{\cos \chi}}^p \cos(\psi - \psi') \rho' d\rho',$$

où $\cos e = \frac{1 - p^2 + 4\omega^2}{4\omega}$, $\cos f = \frac{4\omega^2 - 1 + p^2}{4\omega p}$; $\sin e = p \sin f$.

Pour les produits entre les aberrations du même type

$$(1-p^2) \delta C'_0 = - \frac{2}{\pi} (e - \sin e \cos e) + \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_{-e}^{+e} d\varphi \int_{\frac{\cos e}{\cos \varphi}}^1 (\Delta - \Delta')^2 \rho d\rho \\ - \frac{2p^2}{\pi} (f - \sin f \cos f) + \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_{-f}^{+f} d\varphi \int_{\frac{p \cos f}{\cos \varphi}}^p (\Delta - \Delta')^2 \rho d\rho.$$

Quand $1 - p \geq 2\omega$,

$$(1-p^2) \delta C'_0 = -2p^2 + \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \int_{-\frac{p}{\cos \varphi}}^p (\Delta - \Delta')^2 \rho d\rho.$$

(iv) On peut généraliser toutes ces formules en définissant la fonction

$$(2.42) \quad I(x, y) = \frac{2y^2}{\pi} (x - \sin x \cos x) - \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_{-x}^{+x} d\varphi \int_{\frac{y \cos x}{\cos \varphi}}^y (\Delta - \Delta')^2 \rho d\rho$$

qui représente l'intégrale de $\cos(\psi - \psi')$ sur un segment d'un cercle de rayon y , l'ouverture angulaire du segment étant $2x$. Dans cette notation, le contraste final s'écrit :

$$(2.43) \quad (1-p^2) C'_0 = \begin{cases} 0 & , [\omega \geq 1] \\ I(a, 1), [\omega < 1] \end{cases} \\ - \begin{cases} 0 & , [2\omega \geq 1 + p] \\ I(e, 1) + I(f, p), [1 + p > 2\omega > 1 - p] \\ I(\pi, p) & , [1 - p \geq 2\omega] \end{cases} + \begin{cases} 0 & , [\omega \geq p] \\ I(b, p), [\omega < p] \end{cases},$$

et la qualité est

$$Q = \frac{\pi C'_0}{2} \frac{1}{\arccos \omega - \omega \sqrt{1 - \omega^2}}.$$

Si l'on fait le calcul directement d'après le module, il faut ajouter la quantité

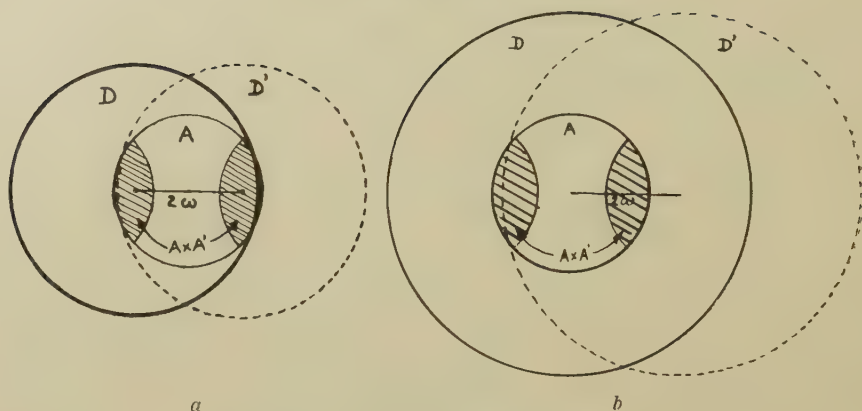


FIG. 11. — Grandeur de la source.

$$+ \frac{4\pi}{\lambda^2 y^2 (x - \sin x \cos x)} \left[\int_{-x}^{+x} d\varphi \int_{\frac{y \cos x}{\cos \varphi}}^y (\Delta - \Delta') \rho d\rho \right]^2$$

à l'équation (2.42) dans le cas de la coma.

c) *Grandeur de la source.* Dans ce cas aussi, nous trouvons qu'il n'est pas nécessaire que la source soit infinie pour avoir les conditions correspondant à la lumière incohérente; on a une limite finie au-dessus de laquelle les résultats ne dépendent plus de la grandeur de la source.

Pour la mire de contraste unité et de luminance $B \cos 2\omega$, le spectre dû à une source en (β, γ) est composé des deux rayons d'amplitude $\sqrt{BU'^2/2}$ qui arrivent sur la pupille en (β, γ) et en $(\beta - 2\omega, \gamma)$. Ils sont la raie directe et un spectre de premier ordre d'un réseau; pour un réseau de contraste plus petit que l'unité, la raie directe est plus intense que l'autre.

L'intensité totale se compose de :

(i) l'intégrale sur les régions où les deux rayons issus du même point de la source passent par la pupille A et produisent un phénomène d'interférences; ces régions, montrées en hachures sur la figure 11, sont les surfaces $A \times A'$.

(ii) l'intégrale de la lumière qui passe par le reste de la pupille des deux images diffractées D et D' de la source. Cette lumière est complètement incohérente parce qu'elle provient d'un rayon de chaque point de la source.

L'intensité totale est donc

$$\begin{aligned} M' &= \frac{BU'^2}{2} \int_{(A-A \times A') \times D} d\alpha + \frac{BU'^2}{2} \int_{(A-A \times A') \times D'} d\alpha + \frac{BU'^2}{2} \int_{(A \times A') \times D'} |e^{i\psi} + e^{i\psi'}|^2 d\alpha \\ &= BU'^2 \int_{(A-A \times A') \times D'} d\alpha + BU'^2 \int_{(A \times A') \times D'} (1 + \cos \overline{\psi - \psi'}) d\alpha \end{aligned}$$

$$= BU'^2 \left[\int_{A \times D'} d\alpha + \int_{(A \times A') \times D'} \cos \overline{\psi - \psi'} d\alpha \right].$$

Ce résultat correspond au cas que nous avons calculé quand $A \times D' = A$, où $\int_A d\alpha = \pi(1 - p^2)$; pour une source circulaire, il faut $(1 + \omega)$ fois le diamètre de la pupille dans le cas le plus favorable (fig. 11 a) où le spectre direct est décentré. On a le cas le moins favorable lorsque le spectre direct de la source est centré sur la pupille (fig. 11 b) auquel cas il faut prendre $(1 + 2\omega)$ fois le diamètre. Pour les sources plus petites, la cohérence est partielle et, au lieu de calculer les intégrales sur la région commune aux deux cercles, il faut en introduire un troisième. Les résultats doivent se rapprocher d'autant plus de ceux que l'on trouve en lumière cohérente que la dimension de la source diminue.

2. Résultats. — a) Conclusions générales.

(i) Dans le cas de l'instrument sans aberrations la fonction $I(x, y)$ se réduit à $2y^2(x - \sin x \cos x)/\pi$; la transformation de Fourier donne une forme plus simple que celle trouvée dans la première partie où nous avons exprimé le contraste en fonction de l'angle c , le troisième angle du triangle dont les autres sont e et f et les côtés sont 1, p et 2ω .

L'intensité est directement proportionnelle à la surface commune à la pupille et à une surface identique déplacée d'une distance 2ω perpendiculairement aux traits de la mire. La limite de résolution ne dépend que du diamètre de la pupille dans cette direction et non de sa forme.

Une obturation centrale augmente le contraste dans les cas où le pas est compris entre cette limite et $2/(1 + p)$ fois cette valeur.

(ii) L'instrument aberrant. Comme la variation de chemin optique $\Delta - \Delta'$ tend vers zéro quand ω tend vers 1, la limite de résolution est indépendante des aberrations, quel que soit leur type ou leur valeur. En pratique, ce pouvoir séparateur n'est pas exactement $\omega = 1$ mais il dépend du seuil du récepteur. Mais, si le contraste de l'objet est fort, la limite pratique est très proche de l'unité et la surface $A \times A'$ qui y correspond est petite. La variation de $\Delta - \Delta'$ sur cette surface est donc très faible, même quand les aberrations sont importantes; les aberrations n'ont qu'un effet faible sur le pouvoir séparateur. Cette conclusion s'applique aussi aux autres mires périodiques puisque, près de la limite, seule la fréquence fondamentale se reproduit dans l'image.

Ce sont les cas des aberrations sur toute la pupille, mais on peut avoir les grands défauts au centre sans aucun effet sur l'image quand le pas de la mire est petit.

b) *Calculs.* L'intégration de l'équation (2.42) nous donne l'expression suivante, exacte au 2^e ordre près de l'aberration

$$(2.44) \quad I(x, y) = \frac{2y^2}{3\pi} P_1 + \left[\right.$$

$$- D^2 \times \frac{16}{3} \pi y^2 \omega^2 \left\{ P_1 (y^2 + 4\omega^2) + 2y \sin^3 x (3y \cos x - 8\omega) \right\}$$

$$- 2DS_1 \times \frac{64}{9} \pi y^2 \omega^2 \left\{ P_1 (y^4 + 12y^2 \omega^2 + 12\omega^4) \right. \\ \left. + 2y \sin^3 x [5y \cos x (y^2 + 6\omega^2) - 12\omega (2y^2 + 3\omega^2)] \right. \\ \left. - 4y^3 \sin^5 x (y \cos x - 6\omega) \right\}$$

$$- S_1^2 \times \frac{32}{45} \pi y^2 \omega^2 \left\{ 5P_1 (3y^6 + 68y^4 \omega^2 + 192y^2 \omega^4 + 96\omega^6) \right. \\ \left. + 10y \sin^3 x [y \cos x (21y^4 + 340y^2 \omega^2 + 480\omega^4) - 48\omega (3y^4 + 14y^2 \omega^2 + 8\omega^4)] \right. \\ \left. - 8y^3 \sin^5 x [y \cos x (21y^2 + 188\omega^2) - 24\omega (7y^2 + 18\omega^2)] \right. \\ \left. + 48y^5 \sin^7 x (y \cos x - 8\omega) \right\}$$

$$- 2DS_2 \times \frac{8}{15} \pi y^2 \omega^2 \left\{ 5P_1 (3y^6 + 72y^4 \omega^2 + 240y^2 \omega^4 + 128\omega^6) \right. \\ \left. + 10y \sin^3 x [y \cos x (21y^4 + 368y^2 \omega^2 + 624\omega^4) - 16\omega (9y^4 + 50y^2 \omega^2 + 32\omega^4)] \right. \\ \left. - 8y^3 \sin^5 x [y \cos x (21y^2 + 208\omega^2) - 24\omega (7y^2 + 22\omega^2)] \right. \\ \left. + 48y^5 \sin^7 x (y \cos x - 8\omega) \right\}$$

$$- 2S_1 S_2 \times \frac{32}{525} \pi y^2 \omega^2 \left\{ 35P_1 (6y^8 + 225y^6 \omega^2 + 1320y^4 \omega^4 + 2000y^2 \omega^6 + 640\omega^8) \right. \\ \left. + 70y \sin^3 x [y \cos x (54y^6 + 1715y^4 \omega^2 + 7040y^2 \omega^4 + 5200\omega^6) \right. \\ \left. - 40\omega (12y^6 + 123y^4 \omega^2 + 240y^2 \omega^4 + 80\omega^6)] \right. \\ \left. - 56y^3 \sin^5 x [y \cos x (81y^4 + 1865y^2 \omega^2 + 4120\omega^4) - 10\omega (81y^4 + \right. \\ \left. + 604y^2 \omega^2 + 640\omega^4)] \right. \\ \left. + 16y^5 \sin^7 x [y \cos x (162y^2 + 1865\omega^2) - 20\omega (81y^2 + 314\omega^2)] \right. \\ \left. - 576y^7 \sin^9 x (y \cos x - 10\omega) \right\}$$

$$- S_2^2 \times \frac{16}{525} \pi y^2 \omega^2 \left\{ 35P_1 (15y^{10} + 828y^8 \omega^2 + 7960y^6 \omega^4 + 24000y^4 \omega^6 \right. \\ \left. + 23040y^2 \omega^8 + 5120\omega^{10}) \right. \\ \left. + 70y \sin^3 x [y \cos x (165y^8 + 8472y^6 \omega^2 + 65800y^4 \omega^4 + 134400y^2 \omega^6 \right. \\ \left. + 61440\omega^8) - 40\omega (45y^8 + 780y^6 \omega^2 + 3168y^4 \omega^4 + 3520y^2 \omega^6 + 768\omega^8)] \right. \\ \left. - 112y^3 \sin^5 x [y \cos x (165y^6 + 6804y^4 \omega^2 + 37540y^2 \omega^4 + 40800\omega^6) \right. \\ \left. - 60\omega (33y^6 + 462y^4 \omega^2 + 1344y^2 \omega^4 + 800\omega^6)] \right. \\ \left. + 96y^5 \sin^7 x [y \cos x (165y^4 + 4536y^2 \omega^2 + 12780\omega^4) \right. \\ \left. - 60\omega (33y^4 + 316y^2 \omega^2 + 480\omega^4)] \right. \\ \left. - 128y^7 \sin^9 x [y \cos x (55y^2 + 756\omega^2) - 20\omega (33y^2 + 158\omega^2)] \right. \\ \left. + 1280y^9 \sin^{11} x (y \cos x - 12\omega) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - B^2 \cos^2 \theta \times \frac{16}{3} \pi y^2 \omega^2 P_1 \\
& - 2 BC_1 \cos^2 \theta \times \frac{16}{3} \pi y^2 \omega^2 \left\{ P_1(y^2 + 4 \omega^2) + 4 y \sin^3 x (y \cos x - 3 \omega) \right\} \\
& - C_1^2 \cos^2 \theta \times \frac{8}{15} \pi y^2 \omega^2 \left\{ 5 P_1(3 y^4 + 34 y^2 \omega^2 + 32 \omega^4) \right. \\
& \quad \left. + 10 y \sin^3 x [y \cos x (15 y^2 + 86 \omega^2) - 24 \omega (3 y^3 + 4 \omega^2)] \right. \\
& \quad \left. - 24 y^3 \sin^5 x (3 y \cos x - 16 \omega) \right\} \\
& - C_1^2 \sin^2 \theta \times \frac{8}{45} \pi y^4 \omega^2 \left\{ 5 P_2(y^2 + 6 \omega^2) + 8 y \sin^5 x (5 y \cos x - 12 \omega) \right\} \\
& - A^2 \sin^2 2 \theta \times \frac{8}{3} \pi y^4 \omega^2 P_2 \left. \right],
\end{aligned}$$

où $P_1 = 3(x - \sin x \cos x)$, $P_2 = 3x - 3 \sin x \cos x - 2 \sin^3 x \cos x$.

Les coefficients des termes en $2 AD \cos 2 \theta$ et $A^2 \cos^2 2 \theta$ sont égaux au coefficient de D^2 ; ceux des termes en $2 AS_1$, $\cos 2 \theta$, etc., sont égaux à ceux de $2 DS_1$, etc.

On obtient une forme plus simple lorsque $\omega = y \cos x$, c'est-à-dire pour $I(a, 1)$ et $I(b, p)$. Dans le premier cas, on pose

$$\varepsilon^2 = 1 - \omega^2, \quad \varepsilon = \sin a, \quad P_3 = P_2 - \frac{8}{5} \varepsilon^5 \omega, \quad P_4 = P_3 - \frac{48}{35} \varepsilon^7 \omega,$$

et on trouve que

$$(2.45) \quad I(a, 1) = \frac{2}{3\pi} P_1 + \left\{ \right.$$

$$\begin{aligned}
& - D^2 \times \frac{16}{3} \pi \omega^2 [(1 + 4 \omega^2) P_3 - \frac{32}{5} \varepsilon^7 \omega] \\
& - 2 DS_1 \times \frac{64}{9} \pi \omega^2 [(1 + 12 \omega^2 + 12 \omega^4) P_3 - \frac{24}{5} \varepsilon^7 \omega (3 + 4 \omega^2)] \\
& - S_1^2 \times \frac{32}{9} \pi \omega^2 [(3 + 68 \omega^2 + 192 \omega^4 + 96 \omega^6) P_3 - \frac{48}{5} \varepsilon^7 \omega (7 + 28 \omega^2 + 16 \omega^4)] \\
& - 2 DS_2 \times \frac{8}{3} \pi \omega^2 [(3 + 72 \omega^2 + 240 \omega^4 + 128 \omega^6) P_3 - \frac{16}{5} \varepsilon^7 \omega (21 + 104 \omega^2 + 64 \omega^4)] \\
& - 2 S_1 S_2 \times \frac{32}{15} \pi \omega^2 [(6 + 225 \omega^2 + 1320 \omega^4 + 2000 \omega^6 + 640 \omega^8) P_3 \\
& \quad - \frac{16}{5} \varepsilon^7 \omega (57 + 497 \omega^2 + 920 \omega^4 + 320 \omega^6)] \\
& - S_2^2 \times \frac{16}{15} \pi \omega^2 [(15 + 828 \omega^2 + 7960 \omega^4 + 24000 \omega^6 + 23040 \omega^8 + 5120 \omega^{10}) P_3 \\
& \quad - \frac{64}{35} \varepsilon^7 \omega (315 + 4578 \omega^2 + 17298 \omega^4 + 19040 \omega^6 + 4480 \omega^8)] \\
& - B^2 \cos^2 \theta \times \frac{16}{3} \pi \omega^2 P_1 \\
& - 2 BC_1 \cos^2 \theta \times \frac{16}{3} \pi \omega^2 [(1 + 4 \omega^2) P_1 - 8 \varepsilon^3 \omega]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - C_1^2 \cos^2 \theta \quad \times \frac{8}{3} \pi \omega^2 [(3 + 34 \omega^2 + 32 \omega^4) P_1 - \frac{2}{5} \varepsilon^3 \omega (129 + 206 \omega^2)] \\
& - C_1^2 \sin^2 \theta \quad \times \frac{8}{9} \pi \omega^2 [(1 + 6 \omega^2) P_4 - \frac{288}{35} \varepsilon^3 \omega] \\
& - A^2 \sin^2 2 \theta \quad \times \frac{8}{3} \pi \omega^2 P_2 \Big\}.
\end{aligned}$$

c) *Limites.*

(i) Lorsque $\omega \rightarrow 0$ on trouve

(2.46)

$$\begin{aligned}
(1 - p^2) C_0' \rightarrow & \left\{ 1 - p^2 - \frac{4}{15} \pi^2 \omega^2 [30(1 - p^4) D^2 + 40(1 - p^6) 2 D S_1 + 60(1 - p^8) S^2 \right. \\
& + 45(1 - p^8) 2 D S_2 + 72(1 - p^{10}) 2 S_1 S_2 + 90(1 - p^{12}) S_2^2] \\
& - 4 \pi^2 \omega^2 \cos^2 \theta [2(1 - p^2) B^2 + 2(1 - p^4) 2 B C_1 + 3(1 - p^6) C_1^2] \\
& \left. - \frac{4}{3} \pi^2 \omega^2 \sin^2 \theta (1 - p^6) C_1^2 - 4 \pi^2 \omega^2 \sin^2 2 \theta (1 - p^4) A^2 \right\};
\end{aligned}$$

les effets des aberrations tendent vers 0 comme ω^2 .

(ii) La limite la plus intéressante est celle où $\omega \rightarrow 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$, parce qu'elle montre l'influence des aberrations sur le pouvoir séparateur. On trouve

$$\begin{aligned}
C_0' \rightarrow & \frac{4 \varepsilon^3}{3 \pi (1 - p^2)} \left\{ 1 - \frac{64}{35} \pi^2 \varepsilon^4 (D^2 + 4 D S_1 + 4 S_1^2 + 6 D S_2 + 12 S_1 S_2 + 9 S_2^2) \right. \\
& - 8 \pi^2 \cos^2 \theta (B^2 + 2 B C_1 + C_1^2) \\
& \left. - \frac{64}{315} \pi^2 \varepsilon^6 C_1^2 \sin^2 \theta - \frac{16}{5} \pi^2 \varepsilon^2 A^2 \sin^2 2 \theta \right\}.
\end{aligned}$$

(2.47)

Si l'on prend le point image au maximum d'intensité dans les cas de l'aberration sphérique et de la coma, on peut mettre les aberrations dans l'ordre d'importance sur le pouvoir séparateur. On a

$$\begin{aligned}
(2.48) \quad & \text{de l'ordre } \varepsilon^2: \text{l'astigmatisme pour } \theta = \pi/4, \quad - 16 \pi^2 \varepsilon^2 A^2/5, \\
& \text{de l'ordre } \varepsilon^4: \text{l'astigmatisme pour } \theta = 0 \text{ ou } \pi/2, \quad - 64 \pi^2 \varepsilon^4 A^2/35, \\
& \text{un défaut de mise au point,} \quad - 64 \pi^2 \varepsilon^4 D^2/35, \\
& \text{la coma pour } \theta = 0, \quad - 16 \pi^2 \varepsilon^4 C_1^2/5, \\
& \text{de l'ordre } \varepsilon^6: \text{la coma pour } \theta = \pi/2, \quad - 64 \pi^2 \varepsilon^6 C_1^2/315, \\
& \text{l'aberration sphérique du 3^e ordre,} \quad - 64 \pi^2 \varepsilon^6 S_1^2/63,
\end{aligned}$$

l'aberration sphérique du 5^e ordre est de l'ordre ε^6 au meilleur foyer pour n'importe quelle valeur de v_0 .

Le calcul nous fournit donc une vérification théorique du fait expérimental bien connu que le pouvoir séparateur n'est sensible qu'à l'astigmatisme.

d) *Coefficients numériques.* Puisque les expressions générales sont trop compliquées pour les manipulations algébriques, nous avons calculé les coefficients des aberrations pour des valeurs de ω croissant de 0,1 en 0,1 pour $p = 0; 0,2$ et $\sqrt{0,1}$; et les résultats sont présentés dans les tableaux 11, 12, et 13. Nous n'avons pas donné les valeurs pour les pupilles obturées lorsque $(1 + p)/2 < \omega < 1$; dans ces cas, les coefficients sont ceux relatifs à la pupille circulaire divisés par $1 - p^2$. Dans le cas de la coma, nous n'avons donné que la valeur relative au maximum de contraste.

TABLEAU 11

PUPILLE SANS OBTURATION.

IMAGE DE LA MIRE : COEFFICIENTS DES ABERRATIONS
DANS L'EXPRESSION DU CONTRASTE C'_0

Aberration	ω	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Constante		0,8729	0,7471	0,6238	0,5046	0,3910	0,2848	0,1881	0,1041	0,0374
— D^2		0,5517	1,4761	2,1018	2,1995	1,8326	1,2196	0,61197	0,19508	0,02201
— $2 DS_1$		0,6272	1,4752	1,9358	1,9822	1,7224	1,2642	0,72892	0,27376	0,03682
— S_1^2		0,8000	1,6395	1,9499	1,9108	1,6918	1,3435	0,87853	0,38583	0,06166
— $2 DS_2$		0,6089	1,3046	1,6459	1,6831	1,4941	1,1453	0,71166	0,29911	0,04659
— $2 S_1 S_2$		0,8279	1,5411	1,7512	1,6971	1,5165	1,2424	0,86685	0,42329	0,07809
— S_2^2		0,8922	1,5049	1,6294	1,5552	1,3954	1,1706	0,86433	0,46627	0,09897
— $C_4^2 \cos^2 \theta$..		0,2234	0,4773	0,5381	0,4467	0,3021	0,1726	0,0816	0,0275	0,00364
— $C_4^2 \sin^2 \theta$..		0,0854	0,2096	0,2691	0,2487	0,1778	0,09736	0,03767	0,00823	0,00049
— $A^2 \sin^2 2\theta$..		0,3281	1,0536	1,8238	2,3620	2,4987	2,1940	1,5459	0,7769	0,1839

TABLEAU 12

Aberration	ω	$p = 0,2$				
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Constante		0,8422	0,6949	0,5665	0,4423	0,3674
— D^2		0,5696	1,4850	1,9526	1,5753	1,3670
— $2 DS_1$		0,6526	1,5226	1,9043	1,5236	1,3149
— S_1^2		0,8322	1,7038	1,9750	1,5642	1,3345
— $2 DS_2$		0,6342	1,3552	1,6607	1,3381	1,1368
— $2 S_1 S_2$		0,8624	1,6042	1,7961	1,4294	1,2016
— S_2^2		0,9294	1,5683	1,6827	1,3438	1,1163
— $C_4^2 \cos^2 \theta$		0,1999	0,4096	0,4979	0,3966	0,2718
— $C_4^2 \sin^2 \theta$		0,0889	0,2178	0,2781	0,2520	0,1798
— $A^2 \sin^2 2\theta$		0,3406	1,0923	1,8880	2,4393	2,5880

c) *Calcul particulier.* A partir des tableaux des coefficients, nous avons calculé les trois conditions $\delta l'/LA'$ ($= -0,5 D/S_1$), v_0 et $-B/C_1$ qui précisent la position du meilleur foyer; les valeurs sont représentées sur la figure 12. On voit que chacun de ces rapports commence pour $\omega = 0$ à une valeur au-dessus de celle relative au

TABLEAU 13

Aberration	ω	$p^2 = 0,1$					
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Constante		0,8148	0,6359	0,4724	0,3706	0,3308	0,2914
— D^2		0,5909	1,4588	1,6090	1,0330	0,9400	1,0088
— $2 DS_1$		0,6916	1,5670	1,6978	1,0838	0,9669	1,0613
— S_1^2		0,8875	1,7903	1,8615	1,1924	1,0468	1,1516
— $2 DS_2$		0,6755	1,4221	1,5480	0,9832	0,8628	0,9544
— $2 S_1 S_2$		0,9196	1,6997	1,7465	1,1194	0,9710	1,0637
— S_2^2		0,9913	1,6678	1,6751	1,0786	0,9277	1,0067
— $C_1^2 \cos^2 \theta$		0,1797	0,3478	0,3816	0,2941	0,2544	0,1075
— $C_1^2 \sin^2 \theta$		0,0945	0,2289	0,2822	0,2368	0,1268	0,1045
— $A^2 \sin^2 2 \theta$		0,3579	1,1378	1,9476	2,4954	2,6843	2,4233

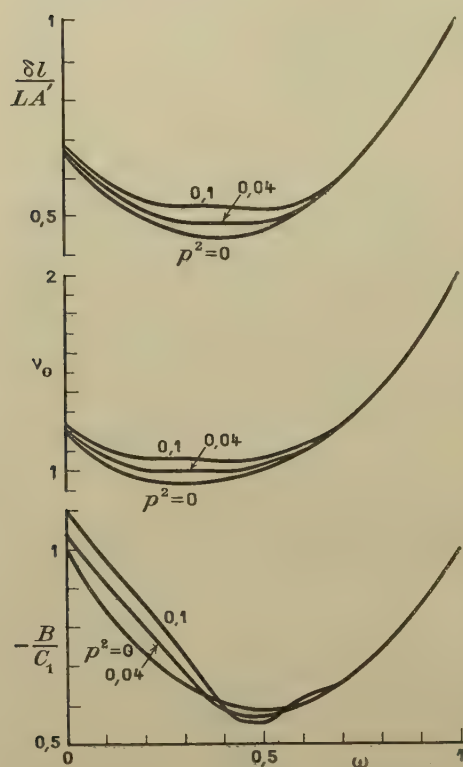


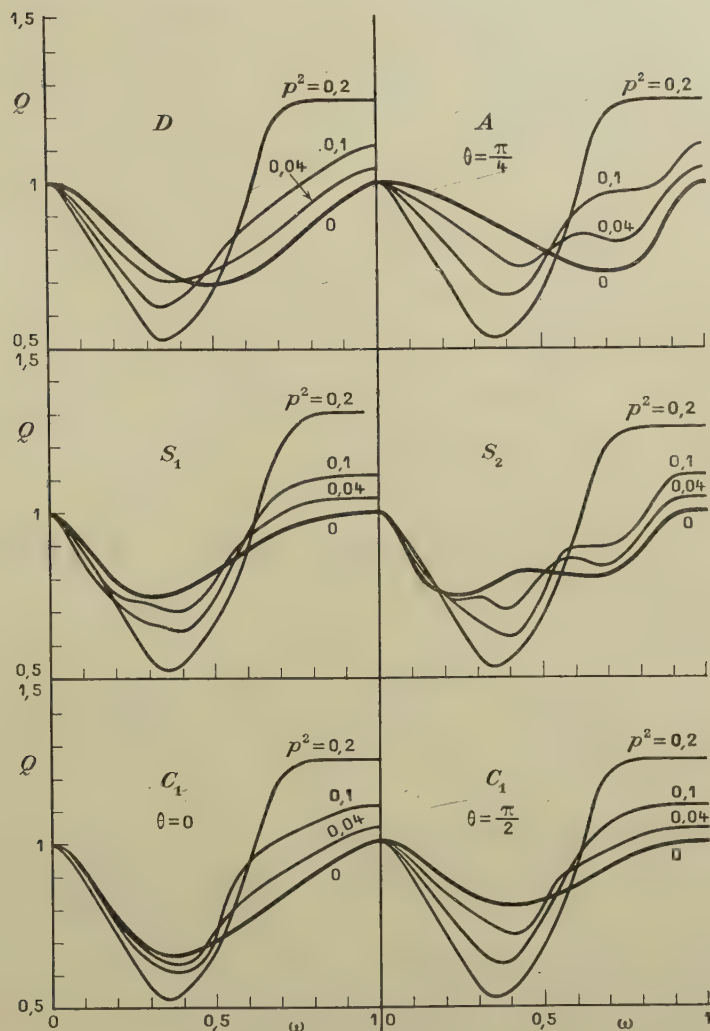
FIG. 12. — La mire. Meilleur foyer.

point, il diminue jusqu'à $\omega \simeq 0,4$ et augmente ensuite. Sa valeur pour $\omega = 1$ est celle du rayon marginal ; $\nu_0 = 2$ correspond au maximum de l'aberration sphérique à la zone marginale. Les différences entraînées par l'obturation sont analogues à celles trouvées d'après l'étude de l'image du point, sauf que, au voisinage de $\omega = 0,5$, on trouve une diminution de chaque rapport, relativement à sa valeur pour la pupille sans obturation. La raison de ceci est facile à comprendre : vers cette valeur de ω , la surface d'intégration $A \times A'$ à la forme montrée sur la figure 10 où une partie de la zone marginale est obturée, et les zones intérieures deviennent relativement plus importantes.

Nous avons aussi calculé la qualité de l'image lorsque chaque aberration a une valeur égale à sa tolérance B ; ces résultats sont représentés sur la figure 13. Ces courbes sont toutes calculées au meilleur foyer sauf celle relative à

l'aberration sphérique du 5^e ordre ; dans ce cas, puisque en pratique l'on ne peut pas modifier ν_0 suivant le pas de l'objet, nous avons fait le calcul avec ν_0 fixé à $1 + p^2$. Il existe une variation entre les formes pour les aberrations différentes, mais les courbes correspondant aux combinaisons des aberrations et de l'obturation sont situées régulièrement entre celle correspondant au cas de l'aberration seule et celle relative à l'obturation seule où $p^2 = 0,2$.

FIG. 13. — La mire. Qualité de l'image.



IV. — Images de disques circulaires.

A cause de sa périodicité, la mire infinie ne représente pas un cas typique d'objet à deux dimensions ; nous étudierons donc un deuxième exemple qui nous semble se rapprocher davantage des objets rencontrés dans la pratique, c'est le cas des disques circulaires.

Nous nous limiterons au cas de l'aberration sphérique.

1. Méthode de calcul. — Ainsi que nous l'avons déjà signalé, la transformation de Fourier n'offre pas de simplification intéressante et nous faisons le calcul par intégration directe sur l'objet.

L'amplitude centrale de l'image due au point (ω, θ) de l'objet s'écrit

$$\begin{aligned} F' &= \frac{bUU'}{\lambda} \int_0^{2\pi} \int_p^1 e^{i\psi} e^{i\rho\omega \cos \varphi - i\theta} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} bUU' \int_p^1 J_0(\rho\omega) e^{i\psi} \rho \, d\rho \\ &\simeq \frac{2\pi}{\lambda} bUU' \int_p^1 J_0(\rho\omega) \left(1 + \frac{2\pi i}{\lambda} \Delta - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} \Delta^2 \right) \rho \, d\rho \end{aligned}$$

au 2^e ordre près des aberrations.

L'intensité due à ce point est

$$(2.49) \quad I' \simeq BU'^2 \, d\sigma \left\{ \left[\frac{J_1(\omega)}{\omega} - p^2 \frac{J_1(p\omega)}{p\omega} \right]^2 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left[\left(\frac{J_1(\omega)}{\omega} - p^2 \frac{J_1(p\omega)}{p\omega} \right) \int_p^1 J_0(\rho\omega) \Delta \rho \, d\rho - \left(\int_p^1 J_0(\rho\omega) \Delta \rho \, d\rho \right)^2 \right] \right\}.$$

L'intensité centrale de l'image d'un disque de rayon ω en lumière incohérente, corrigée de l'intensité du fond, s'écrit

$$(2.50) \quad \frac{2\pi}{1-p^2} \int_0^\omega I' \omega \, d\omega.$$

a) *Pupille circulaire.* En tenant compte de l'aberration sphérique seulement, le chemin optique Δ s'écrit

$$\Delta = \lambda(D \rho^2 + S_1 \rho^4 + S_2 \rho^6).$$

Par des intégrations par parties, on peut montrer que

$$\int_0^1 \rho^{2n+1} J_0(\rho\omega) \, d\rho = \frac{J_1(\omega)}{\omega} - 2n \frac{J_2(\omega)}{\omega^2} + 2n(2n-2) \frac{J_3(\omega)}{\omega^3} - \dots$$

Nous définissons la fonction

$$(2.51) \quad C_n(\omega) = 2 \int_0^1 \rho^{2n+1} J_0(\rho\omega) \, d\rho;$$

en employant la notation de Jahnke et Emde [19]

$$\Lambda_n(\omega) = \frac{2^n n!}{\omega^n} J_n(\omega),$$

nous avons

$$(2.52) \quad C_n(\omega) = \Lambda_1(\omega) - \frac{n}{2!} \Lambda_2(\omega) + \frac{n(n-1)}{3!} \Lambda_3(\omega) \dots (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \Lambda_{n+1}(\omega).$$

L'utilité de ces fonctions dans le calcul des figures de diffraction a été indiquée par Lansraux [20]; il a employé la notation $L_n(\omega)$.

Dans l'expression (2.50), on trouve des intégrales de la forme

$$\int_0^w \Lambda_m(w) \Lambda_n(w) w \, dw$$

que l'on peut intégrer par parties ; on arrive soit directement au résultat ($m + n$ impair), soit aux intégrales de la forme $\int_0^w \Lambda_n^2(w) w \, dw$ ($m + n$ pair) que l'on peut évaluer parce que

$$(2.53) \quad \int_0^w \Lambda_n^2 w \, dw = \frac{2n^2}{2n-1} \left(1 - \frac{w^2}{4n^2} \Lambda_n^2 - \Lambda_{n-1}^2 \right).$$

En définissant les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(w) &= 4\pi^2 \left[\Lambda_1^2 - \Lambda_1 \Lambda_2 + \frac{w^2}{16} \Lambda_2^2 \right] \\ \mathbf{F}_2(w) &= 4\pi^2 \left[-\Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2^2 \right] \\ \mathbf{F}_3(w) &= 4\pi^2 \left[-\Lambda_1 \Lambda_4 + 2\Lambda_2 \Lambda_3 - \Lambda_2^2 - \frac{w^2}{36} \Lambda_3^2 \right] \\ \mathbf{F}_4(w) &= 4\pi^2 \left[-\Lambda_1 \Lambda_5 + \frac{5}{2} \Lambda_2 \Lambda_3 - \frac{3}{2} \Lambda_2^2 - \frac{w^2}{24} \Lambda_3^2 \right] \\ \mathbf{F}_5(w) &= 4\pi^2 \left[-\Lambda_1 \Lambda_6 + \frac{5}{2} \Lambda_2 \Lambda_4 - \frac{3}{2} \Lambda_3^2 \right] \\ \mathbf{F}_6(w) &= 4\pi^2 \left[-\Lambda_1 \Lambda_6 + 3\Lambda_2 \Lambda_5 - 5\Lambda_3 \Lambda_4 + 3\Lambda_3^2 + \frac{3w^2}{64} \Lambda_4^2 \right], \end{aligned}$$

on trouve le résultat :

$$(2.54) \quad 2\pi \int_0^w I' w \, dw = \pi U'^2 B \left\{ 1 - \mathbf{J}_0^2(w) - \mathbf{J}_1^2(w) \right. \\ \left. - D^2 \mathbf{F}_1 \right. \\ \left. - 2DS_1(2\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \right. \\ \left. - S_1^2(4\mathbf{F}_1 - 4\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) \right. \\ \left. - 2DS_2(3\mathbf{F}_1 - 3\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_4) \right. \\ \left. - 2S_1S_2(6\mathbf{F}_1 - 9\mathbf{F}_2 + 3\mathbf{F}_3 + 2\mathbf{F}_4 - \mathbf{F}_5) \right. \\ \left. - S_2^2(9\mathbf{F}_1 - 18\mathbf{F}_2 + 9\mathbf{F}_3 + 6\mathbf{F}_4 - 6\mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6) \right\}.$$

b) *Pupille annulaire.* Dans ce cas, on a

$$(2.55) \quad 2 \int_p^1 \rho^{2n+1} \mathbf{J}_0(\rho w) \, d\rho = \mathbf{C}_n(w) - p^{2n+2} \mathbf{C}_n(pw).$$

On ne peut pas calculer les intégrales du type $\int_0^w \Lambda_m(w) \Lambda_n(pw) w \, dw$ directement ; elles peuvent être exprimées en séries des fonctions de Bessel⁽¹⁾, mais nous

(1) Résultat communiqué par H. H. Hopkins.

avons calculé les coefficients des aberrations par des quadratures numériques, le coefficient de D^2 étant

$$-\frac{4\pi^2}{1-p^2} \int_0^w \left\{ [C_0(w) - p^2 C_0(pw)] [C_2(w) - p^6 C_2(pw)] \right. \\ \left. - [C_1(w) - p^4 C_1(pw)]^2 \right\} w \, dw, \text{ etc.}$$

2. **Résultats.** — Les tables de Jahnke et Emde de $\Lambda_n(w)$ à quatre chiffres ne sont pas assez exactes pour ces calculs ; nous avons donc calculé $\Lambda_n(w)$ à partir des tables de Hayashi [21] de $J_0(w)$ et $J_1(w)$ en utilisant la formule de récurrence

$$\Lambda_n(w) = \frac{n(n-1)}{w^2} \left[\Lambda_{n-1}(w) - \Lambda_{n-2}(w) \right]$$

où

$$\Lambda_0(w) = J_0(w), \quad \Lambda_1(w) = 2 J_1(w)/w.$$

Nous avons calculé ces fonctions à sept chiffres, ce qui nous permet de donner les tableaux 14 et 15 des coefficients à quatre chiffres ; elles représentent les cas de $p = 0$ et $p = 0,3$.

TABLEAU 14

DISQUES CIRCULAIRES, $p = 0$ *Intensité et coefficients des aberrations*

w	1	2	3	4	5	6	7	8
I'_0	0,2209	0,6173	0,8174	0,8379	0,8612	0,9008	0,9100	0,9156
$-D^2$	0,7254	1,9789	2,3072	1,5890	0,7686	0,3980	0,2903	0,2000
$-2DS_1$...	0,7194	1,9137	2,1471	1,4488	0,8037	0,5882	0,4862	0,3290
$-S_1^2$	0,7620	1,9844	2,1686	1,4918	1,0019	0,8972	0,7509	0,5090
$-2DS_2$...	0,6438	1,6839	1,8400	1,2240	0,7346	0,6095	0,5152	0,3576
$-2S_1S_2$...	0,7113	1,8248	1,9572	1,3592	1,0018	0,9568	0,8001	0,5622
$-S_2^2$	0,6837	1,7298	1,8302	1,2998	1,0516	1,0472	0,8734	0,6408

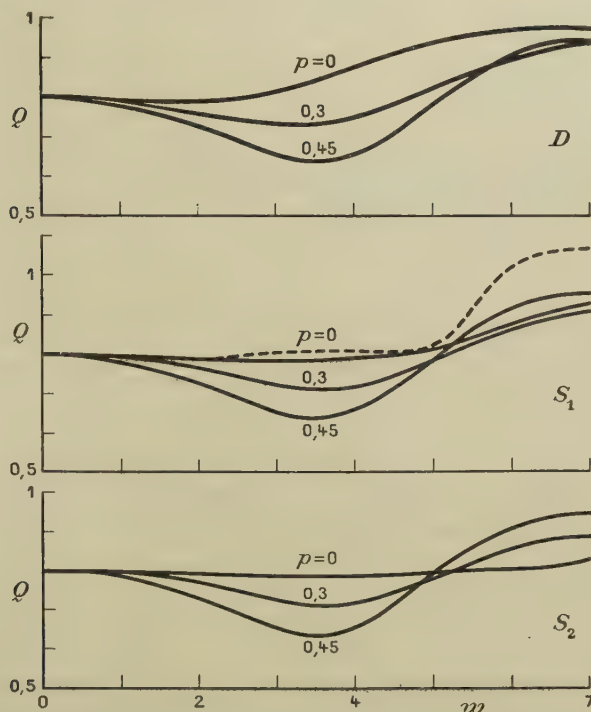
TABLEAU 15

DISQUES CIRCULAIRES, $p = 0,3$ *Intensité et coefficients des aberrations*

w	1	2	3	4	5	6	7
I'_0	0,1987	0,5364	0,6766	0,6868	0,7586	0,8592	0,8976
$-D^2$	0,5404	1,4299	1,6223	1,2371	1,0210	1,0533	0,8690
$-2DS_1$...	0,5855	1,5201	1,6810	1,2866	1,1430	1,2154	0,9721
$-S_1^2$	0,6640	1,6956	1,8397	1,4371	1,3798	1,4943	1,1756
$-2DS_2$...	0,5428	1,3890	1,5057	1,1554	1,0775	1,1588	0,9015
$-2S_1S_2$...	0,6365	1,6050	1,7155	1,3588	1,3685	1,4891	1,1540
$-S_2^2$	0,6257	1,5599	1,6490	1,3336	1,4053	1,5312	1,1807

a) *Cas particuliers.* La qualité de l'image, égale à l'intensité centrale divisée par celle due à l'instrument parfait, est représentée sur la figure 14 pour les cas d'un défaut de mise au point, des aberrations sphériques du 3^e et du 5^e ordre et

FIG. 14. — Disques
circulaires. Qualité de
l'image.



les obturations $p = 0 ; 0,3 ; 0,45$. Dans chaque cas, l'aberration est égale à sa tolérance du type B.

Dans le cas de l'aberration du 3^e ordre et de la pupille circulaire, si l'on prend comme meilleur foyer le point où la qualité est maximum, on trouve que, pour $w > 6,3$, l'aberration augmente l'intensité centrale au-dessus de celle de l'instrument parfait : la partie en tirets de la figure 14 correspond à ce meilleur foyer. Mais, pour obtenir cette augmentation de l'intensité au centre de l'image, l'intensité vers le bord doit être diminuée et l'image du disque ne serait pas nette. En pratique, l'on choisit le meilleur foyer d'après la netteté de l'image, soit du disque lui-même, soit des points isolés dans le champ visuel. Pour cette raison, nous avons calculé les courbes relatives à ce cas et au cas de l'aberration du 5^e ordre au meilleur foyer pour le point ; nous avons vu que ceci correspond également au meilleur foyer pour le bord d'une plage.

Les variations dans le cas d'une obturation $p = 0,3$ sont plus petites ; on ne trouve aucune augmentation d'intensité centrale. On voit, de plus, sur la figure 15 où sont représentées les variations de $\delta l'/LA'$ (aberration du 3^e ordre) et de v_0 (aberration du 5^e ordre), que le cas de l'obturation correspond à des variations moins grandes ; quand $p = 0$, l'ouverture de correction v_0 passe par l'infini pour $w = 6,3$ à peu près. Mais, pour $w < 5$, le rapport entre cette quantité pour $p = 0,3$ et celle pour $p = 0$ garde approximativement la valeur $1 + p^2$.

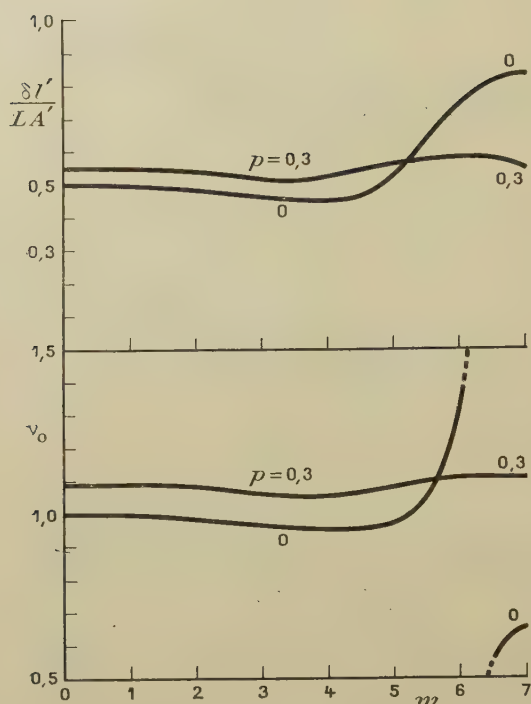


FIG. 15. — Disques circulaires. Meilleur foyer.

Sur la question des tolérances, la figure 14 montre que la tolérance B n'est pas satisfaisante quand w se trouve près de 3,5, car la qualité diminue quand on augmente l'obturation. Mais avec les tolérances A, la qualité reste à peu près constante à ce rayon du disque.

b) *Précision.* Nous avons contrôlé l'erreur, faite dans ces calculs, de l'intensité de l'image des disques où nous n'avons tenu compte des aberrations qu'au 2^e ordre, en les comparant aux résultats donnés dans la première partie d'après les calculs exacts de Martin [10] pour la pupille circulaire; ces derniers résultats sont également calculés au meilleur foyer pour le point. Lorsque l'aberration est égale à sa tolérance, l'erreur est moindre que

0,03 fois l'intensité dans le cas d'un défaut de mise au point et moindre que 0,02 pour les aberrations sphériques.

TROISIÈME PARTIE

TOLÉRANCES POUR LES INSTRUMENTS A PUPILLES ANNULAIRES

Dans cette section, nous présenterons une synthèse des résultats des calculs sur les divers objets pour définir finalement les tolérances sur les aberrations et sur l'obturation, et nous étudierons la qualité fournie par cette série des tolérances dans un cas expérimental. D'ailleurs, nous utiliserons les mêmes résultats pour considérer les tests propres à l'étude de cette espèce d'instrument.

I. — Tolérances théoriques

1. **Choix d'un critérium.** — Nous avons vu que, en dehors des résultats de Steward [3, 4] qui ne tiennent pas compte de la diminution de la qualité totale entraînée par l'obturation mais seulement des effets des aberrations, il existe deux critères possibles : celui que Grey [5] a utilisé et que nous avons appelé la tolérance B, et un critérium plus sévère, la tolérance A.

Pour décider entre les deux, nous avons adopté la règle que la qualité fournie par l'instrument obturé doit être la même que celle donnée par un instrument sans obturation, quand chacun a une aberration égale à sa tolérance. D'après cette règle, la qualité de l'image comme fonction de l'obturation doit être constante. Dans la section précédente, nous avons montré les variations de la qualité pour des obturations différentes dans le cas des tolérances B ; nous n'avons pas donné toutes les courbes pour la tolérance A parce qu'elles ne sont pas assez nettement séparées. Dans cette section, nous adopterons un autre mode de représentation : sur les figures 16 et 17 nous donnons deux cas de variation de la qualité

FIG. 16. — Qualité des images suivant les deux tolérances. Aberration sphérique :
a) point ; b) ligne ; c) mire, $\omega = 0,4$; d) disque, $\omega = 3,5$.

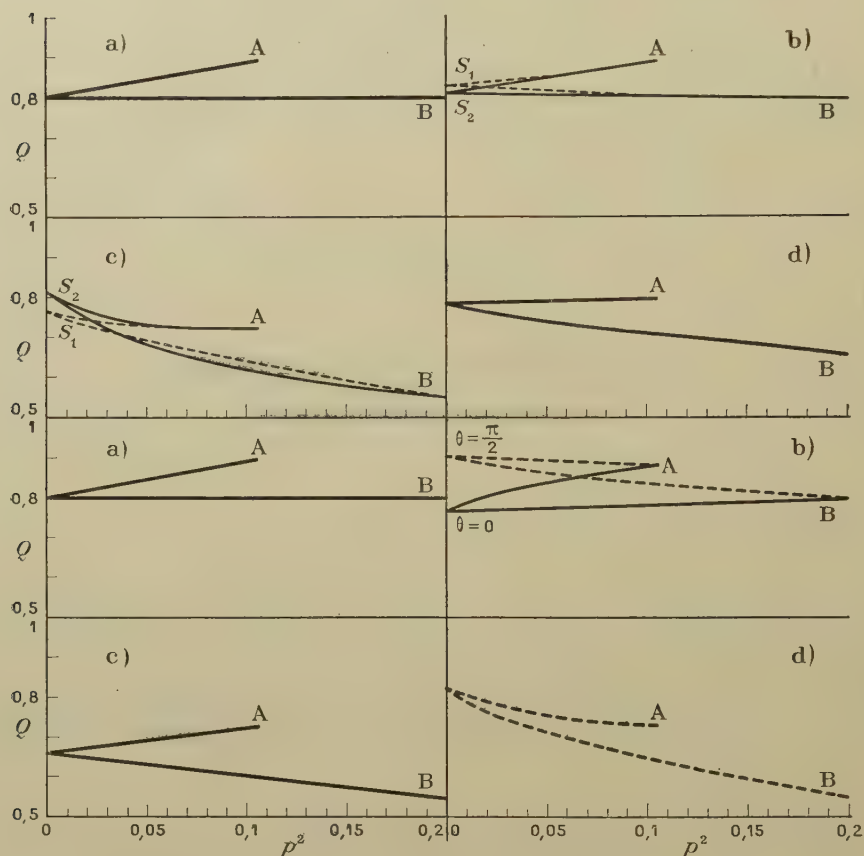


FIG. 17. — Qualité des images suivant les deux tolérances, Coma :
a) point ; b) ligne ; c) mire, $\omega = 0,4$, $\theta = 0$; d) mire, $\omega = 0,4$, $\theta = \pi/2$.

avec l'obturation d'après les deux tolérances. Nous avons choisi les cas de l'aberration sphérique et de la coma du 3^e ordre, car ils sont en général les plus importants dans le calcul des instruments. Les objets que nous avons choisis sont le point, la ligne, une mire de fréquence $\omega = 0,4$ et un disque de rayon $\omega = 3,5$. Dans chaque cas, c'est la qualité du type B que nous avons représentée ; elle correspond au contraste de l'objet noir ou à l'intensité de l'objet lumineux, corrigée de la surface de la pupille. La qualité du type A n'a pas d'importance pratique dans l'étude des images, nous l'avons introduite seulement comme base de calcul des tolérances.

Sur ces figures, on voit que les cas critiques sont ceux des objets à deux dimensions ; si notre règle s'applique à tous les objets, il faut adopter une tolérance du

type A pour obtenir une qualité à peu près constante, celle donnée par la tolérance B baisse quand on augmente l'obturation. Bien que l'adoption des tolérances A ne repose que sur l'étude de deux cas spéciaux, il s'agit d'objets très différents de forme mais dont la dimension est le double du pouvoir séparateur ; il nous semble donc que tous les objets à deux dimensions de cette grandeur devraient exiger cette tolérance. De plus, ce sont probablement les plus petits objets que l'on étudie en détails et, comme la qualité de leurs images est la plus basse de toutes celles que nous avons calculées, c'est justement dans ces cas que l'on a besoin d'une image aussi bonne que possible.

Cependant, si l'on sait d'avance qu'un certain instrument ne sera pas utilisé pour étudier ces cas critiques on peut se servir, pour le calculer, des tolérances B.

2. Effets de la tolérance. — La formule la plus commode pour la tolérance est l'équation (2.17). D'après cette équation qui peut être exprimée sous la forme

$$(3.1) \quad n \left[\frac{b}{T(b)} \right]^2 \leq \frac{1 - 9,47 p^2}{1 - p^2} \text{ (tolérance A)} \leq \frac{1 - 5 p^2}{1 - p^2} \text{ (tolérance B),}$$

où n est le nombre des aberrations indépendantes qui sont présentes, nous représenterons sur la figure 18 l'effet de l'obturation sur les tolérances A. L'ordonnée des courbes est la tolérance sur une aberration relative à celle de cette aberration lorsqu'elle est seule et sans obturation ; nous donnons les cas depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 4$.

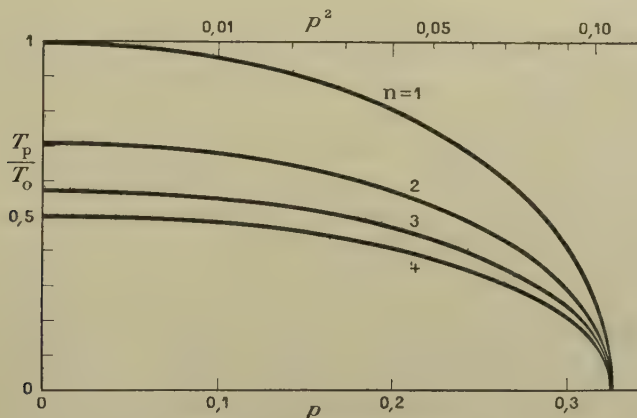


FIG. 18. — Tolérances relatives.

Puisque l'équation (2.17) ou (3.1) emploie la notation de Nijboer, les tolérances sont relatives aux coefficients $b_{l n m}$. Pour trouver les valeurs pour les aberrations dans une autre notation, il faut employer l'équation (2.14) ; par exemple, la tolérance sur ΣW est $(1 + p^2)^3 / (1 - p^2)^3$ fois la valeur trouvée sur la figure 18. La tolérance sur l'obturation est $p < 0,325$, soit $p^2 < 0,1056$; à cette obturation, il ne reste plus de tolérance pour les aberrations. Mais, lorsque $p = 0,28$, la moitié de la tolérance reste pour l'aberration.

3. **Tolérances pour la pupille circulaire.** — Les tolérances adoptées pour les instruments sans aberration sont calculées d'habitude d'après la règle de Lord Rayleigh, laquelle conduit à une qualité de 0,8 pour l'image d'un point. Mais nous avons vu que les effets des aberrations tolérables des différents types sur la qualité des images des objets étendus ne sont pas tous les mêmes ; de plus il se peut que la qualité dans le cas des mires ne puisse pas atteindre la valeur 0,8 pour certaines fréquences.

Une étude de cette tolérance est hors de l'objet de ce travail ; signalons cependant que, si l'on applique le critérium du cas critique, on trouvera les valeurs données dans le tableau 16 qui sont calculées d'après une image de la mire de qualité 0,8 pour la fréquence où la qualité est minimum.

TABLEAU 16
TOLÉRANCES SANS OBTURATION

	D	S_1	S_2	C_1	A
Calculées pour le point	0,25	0,98	3,87	0,62	0,18
Calculées pour la mire.....	0,21	0,86	3,46	0,48	0,16
Fréquence ω de la mire	0,5	0,3	0,2	0,4	0,7

4. **Zone de correction.** — La seule valeur des rapports entre les aberrations que nous avons calculés pour trouver le meilleur foyer qui influe sur le calcul d'un instrument, est v_0 carré de la zone de correction de l'aberration sphérique. Les autres rapports ne montrent qu'un déplacement de la position du maximum d'intensité du foyer paraxial. Pour le point, et encore approximativement pour la ligne, v_0 doit être égal à $1 + p^2$ mais, dans les cas critiques, il est égal à 0,96 fois cette valeur ; la différence entre cette valeur et l'unité est trop petite pour nécessiter un changement de la zone de correction.

Quand il s'agit des tolérances A, v_0 ne peut pas dépasser 1,1 et nous avons montré pour le point, en posant $v_0 = 1$, que la perte de contraste n'est pas importante. Mais, quand on calcule un instrument d'après les tolérances B, il est préférable d'employer $v_0 = 1 + p^2$.

5. **Limite pratique de l'obturation.** — Quelques auteurs ont employé une autre méthode pour exprimer la tolérance sur l'obturation : ils ont donné une « limite supérieure pratique » au-dessus de laquelle les tolérances sur les aberrations deviennent trop petites. Si nous admettons une valeur égale à la moitié de la tolérance relative à la pupille circulaire, nous trouvons les limites :

$$\begin{array}{ll} p^2 < 0,08 & \text{d'après les tolérances A,} \\ \text{ou } p^2 < 0,15 & \text{d'après les tolérances B.} \end{array}$$

D'après les études théoriques et expérimentales sur le microscope à miroirs, Bouwers [22] a donné la valeur de 0,09 et Grey [23] a donné 0,10 pour cette limite de p^2 . En étudiant les planètes avec un télescope, Dall [24] a trouvé que la perte de contraste est trop forte pour une obturation $p^2 = 0,2$, et qu'il fallait

$p^2 < 0,1$ pour obtenir une qualité acceptable. Il nous semble que ces résultats plaident en faveur des tolérances A.

II. — Tests-objets

Les méthodes expérimentales d'étude de la qualité des instruments peuvent être classées en deux types. Celles de la première catégorie permettent l'étude de l'aberration seule, sans faire intervenir la diffraction ; ce sont les études de la marche des rayons (méthode de Hartmann ou méthodes des ombres) et de la surface d'onde (méthodes interférentielles, de contraste de phase). Les autres consistent à étudier les images de certains tests objets ; la qualité de l'instrument est jugée d'après la qualité de ces images particulières.

1. **Choix des tests.** — Les résultats des sections précédentes peuvent fournir des indications importantes sur la forme des tests que l'on doit employer. Par rapport à l'image du point, on voit que l'image de la ligne est moins sensible aux effets de toutes les aberrations sauf de la coma, tandis que les images du disque de rayon $\omega = 3,5$ et de la mire de fréquence 0,4 y sont plus sensibles. Dans le cas de la pupille annulaire, il est préférable d'employer un objet qui donne les mêmes valeurs relatives aux aberrations et à l'obturation qui existent dans la formule pour les tolérances ; c'est-à-dire que l'on doit employer les cas critiques du disque et de la mire sur lesquels les tolérances A sont basées.

2. **Mode d'emploi.** — On peut étudier la qualité, soit par l'observation visuelle des images fournies par l'instrument étudié et par un instrument de comparaison dont la qualité est connue, soit en faisant une mesure directe du contraste de l'image. Ce sont les méthodes dont il faut se servir quand on utilise comme objet le point, la ligne ou les disques.

Mais, pour la mire, il y a un autre mode d'emploi : on étudie visuellement la limite de résolution relative aux différents contrastes de l'objet. Pour arriver cependant dans la région critique où ω est compris entre 0,3 et 0,5, il faut un contraste de l'objet de l'ordre de 0,05, étant donné que le seuil de contraste auquel l'œil est sensible est 0,02. Si un tel contraste est difficile à obtenir en pratique, on peut toujours mesurer le contraste de l'image d'un objet à fort contraste.

Une mesure du pouvoir séparateur sur une mire à fort contraste n'a pas la même utilité. Nous avons montré dans la deuxième partie que, dans ce cas, l'image est très peu sensible aux aberrations, sauf l'astigmatisme ; le pouvoir séparateur reste à peu près constant. Ce fait a été démontré par les expériences d'Arnulf [14].

Les résultats de nos calculs ne s'appliquent qu'au cas où la mire a un nombre de traits suffisant pour pouvoir être considérée comme semblable à une mire infinie. Mais, quand il y a très peu de traits, le spectre sur la pupille n'est plus formé de deux points, mais de deux taches de diffraction dont la grandeur correspond à l'ouverture présentée par l'objet.

La limite n'est plus $\omega = 1$, mais la courbe dépasse cette valeur et elle oscille autour de l'axe comme l'a montré Arnulf par des intégrations sur une mire finie. Vers $\omega = 1$, la surface de la pupille qui contribue à la formation de l'image est plus grande que celle relative à la mire infinie et les effets des aberrations sont donc plus importants ; ces effets augmentent d'autant plus que la grandeur de la mire diminue.

III. — Etude expérimentale

Comme nous l'avons déjà indiqué, les calculs de ce travail ont été effectués en appliquant le principe de Huygens-Fresnel par l'intermédiaire de l'équation de Stokes, et Maréchal [7] a démontré par ses expériences que cette manière de calculer est assez précise lorsque la pupille a une ouverture moyenne.

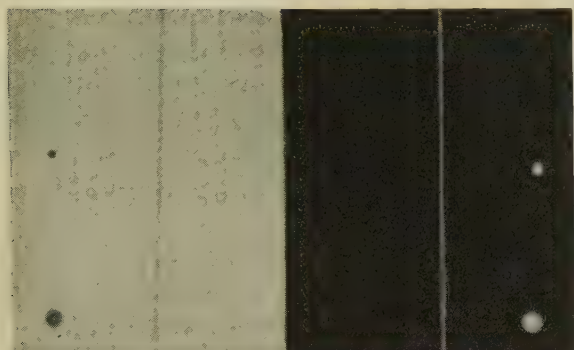
Dans cette section, nous ne voulons pas établir de nouveau ce résultat en faisant des mesures sur les images d'autres objets, mais nous étudierons l'utilité pratique du critérium sur lequel nous avons basé nos calculs de la netteté de l'image et de la tolérance sur les aberrations. Nous avons défini la qualité d'une image par son intensité centrale et il nous reste à démontrer que cette valeur est en accord avec la qualité subjective et qu'elle fournit des tolérances qui sont satisfaisantes en pratique.

Nous utiliserons comme aberration un défaut de mise au point et nous étudierons les images en présence de diverses valeurs de ce défaut, combinées à des obturations. Nous ne comparerons ces images que subjectivement, soit visuellement, soit en regardant des photographies ; comme il ne s'agit que d'une comparaison, les erreurs propres à la photométrie photographique ne seront pas importantes pourvu que l'on se place toujours dans les mêmes conditions.

1. Dispositif employé. — Comme objet, nous avons pris les divers cas que nous avons calculés ; nous avons formé son image à l'aide d'une lentille d'ouverture très faible, $U = U' = 0,001\ 25$, ce qui fournit une grande tache de diffraction, 0,07 mm étant équivalent à $\omega = 1$. Cet objectif était une lentille simple ; pour cette ouverture l'aberration sphérique était négligeable.

Nous avons pris un objet divisé en deux parties, à fond clair et à fond noir, la ligne entre les deux fournissant un bord de plan. Sur chaque plage nous avons disposé une ligne et des disques de rayons $\omega = 0,8$ (pratiquement un point), $\omega = 3,5$ et $\omega = 7$. Les disques lumineux ont été faits par perforation d'une lame d'aluminium à l'aide d'aiguilles ; en tournant l'aiguille dans les trous, nous les avons obtenus très sensiblement circulaires. Les disques noirs ont été produits par l'évaporation sur verre d'une couche opaque d'aluminium à travers ces trous. La ligne noire était un fil et la ligne lumineuse était une fente entre deux lames de rasoir. De plus, nous avons utilisé des photographies d'une mire de fréquence $\omega = 0,4$.

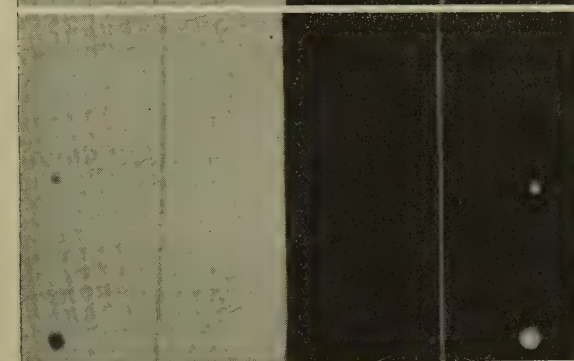
FIG. 19.



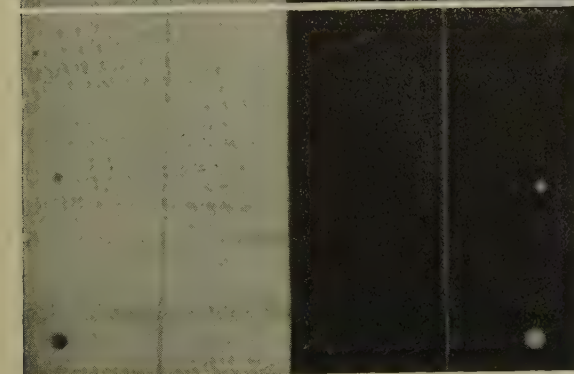
1. Instrument parfait, $D = 0$,
 $p^2 = 0$.



2. Pupille circulaire, $D = 0,25$,
 $p^2 = 0$.



3. Tolérance A, $D = 0,07$, $p^2 = 0,1$.



4. Tolérance B, $D = 0$, $p^2 = 0,2$.

L'objet était éclairé par une lampe à vapeur de sodium dont l'image était projetée dans le plan de l'objectif. Les raies secondaires de cette lampe, beaucoup plus faibles que le doublet jaune, n'avaient aucune influence sur les résultats, parce que nous n'avons tenu compte que des parties de l'image où l'intensité était forte. Près de l'objectif, nous avons placé les pupilles qui étaient des lames de verre sur lesquelles nous avons collé l'ouverture circulaire et diverses obturations centrales circulaires.

Nous avons étudié les images à l'aide d'un oculaire de grossissement 2,5 et de photographies prises sur un film de 35 mm. Pour montrer les petites différences d'intensité dans la partie centrale de l'image, nous avons employé le film « Micro-file » à fort contraste et, pour éviter les variations de contraste dues aux erreurs de temps de pose, nous avons comparé les qualités d'images sur les objets clairs et les objets noirs en même temps, car un changement du temps de pose a des effets inverses dans les deux cas. Nous avons aussi pris des photographies sur le film « Plus X » à contraste plus faible et ces photographies montrent, non seulement la partie centrale de l'image, mais aussi les premiers anneaux de diffraction ; nous présentons des agrandissements de ces dernières photographies sur la figure 19.

Les renseignements que nous avons tirés de ces expériences sont présentés dans les sections suivantes.

2. Relation entre l'intensité centrale et la qualité subjective. — Pour les cas du point, de la ligne et du bord de plage, nous avons calculé la forme de l'image entière. Dans chaque cas, la tache centrale a une forme semblable, en présence des obturations, à celle fournie par l'instrument parfait, et l'intensité centrale représente, d'une manière satisfaisante, la qualité de l'image. Pour la mire, l'image est toujours sinusoïdale lorsque $\omega > 1/3$ et sa netteté est caractérisée directement par son contraste.

Cependant, dans le cas des disques, on trouve que la forme de l'image change suivant l'obturation ; lorsque $\omega = 3,5$, le centre est un minimum d'intensité relativement au bord de l'image ; lorsque $\omega = 7$, nous avons un maximum au centre. La différence entre l'intensité centrale et l'intensité moyenne de l'image ne semble pas changer lorsqu'il y a un défaut de mise au point, mais elle augmente quand on a une obturation. Dans le premier cas, l'intensité centrale donne une valeur trop petite de la qualité moyenne de l'image ; dans le dernier cas, elle est trop grande. Mais on n'utilise pas la qualité moyenne, sauf dans le cas où l'on ne veut pas une limite de séparation plus petite que $\omega = 3,5$ à peu près ; si l'on cherche plus de détails une telle image qui approche de la forme d'un anneau ne semblera pas satisfaisante et l'emploi de l'intensité centrale pour le disque de rayon $\omega = 3,5$ nous paraît raisonnable.

Les variations de forme de l'image dont nous avons parlé sont visibles sur les photographies de la figure 19.

3. **Sensibilité des tests.** — Pour une comparaison visuelle entre deux images, seuls les objets noirs sur fond clair sont utiles ; les objets lumineux montrent très bien les anneaux, mais on ne peut pas voir les variations dans la tache centrale. Les divers effets d'un défaut de mise au point et d'une obturation relatifs aux différents objets semblent correspondre aux résultats des calculs. Cependant l'image de la mire n'est pas très commode pour les comparaisons visuelles ; elle nous semble mieux adaptée aux mesures directes de contraste.

4. **Validité des tolérances.** — Nous avons étudié les images correspondant aux deux tolérances A et B en utilisant les cas suivants :

$$A : p^2 = 0, D = \pm 0,25 ; p^2 = 0,05, D = \pm 0,2 ; p^2 = 0,1, D = \pm 0,07$$

$$B : p^2 = 0, D = \pm 0,25 ; p^2 = 0,1, D = \pm 0,2 ; p^2 = 0,2, D = 0.$$

Nous avons comparé la qualité des images d'après les photographies et aussi visuellement, en regardant deux images plusieurs fois alternativement.

Malheureusement, un défaut de mise au point de $\lambda/4$ représente, à cette ouverture, une distance importante qui produit un changement de la grandeur de l'image à cause du changement de l'ouverture. Nous avons trouvé qu'un déplacement vers l'objectif fournit une image plus nette que celle fournie par le même défaut dans le sens contraire. Pour cette raison, nous avons tenu compte des défauts dans les deux sens. Pour obtenir les agrandissements de la figure 19, nous avons essayé de compenser cet effet en ramenant toutes les images à la même grandeur. Les cas présentés sont : (1) $p^2 = 0, D = 0$; (2) $p^2 = 0, D = 0,25$; (3) $p^2 = 0,1, D = 0,07$; (4) $p^2 = 0,2, D = 0$.

D'après nos observations, on peut voir que les images correspondant à la tolérance B montrent une perte de qualité quand on augmente l'obturation ; cette différence est visible sur les photographies (2) et (4). Les différences correspondant aux cas (2) et (3) sont plus petites, mais il est difficile de dire que ces images sont exactement équivalentes.

Bien que ces expériences et les résultats de Bouwers et de Grey déjà cités soient favorables aux tolérances A, de préférence à celles de la série B, il nous semble que leur validité ne sera établie qu'après les observations des chercheurs qui utilisent les instruments à obturation centrale sur toutes espèces d'objets que l'on trouve en pratique.

En Optique, c'est surtout dans la microscopie que la limite de résolution dépend de la diffraction et, pour cette raison, nous continuerons ce travail par une étude sur le calcul des microscopes à miroirs pour indiquer les systèmes qui peuvent satisfaire aux tolérances.

QUATRIÈME PARTIE

LE MICROSCOPE A MIROIRS

Le microscope à miroirs est un instrument qui présente une obturation centrale dont la grandeur dépend du calcul géométrique. Sous ce rapport, il est différent du télescope, car l'obturation de celui-ci est très souvent variable suivant la grandeur du champ. Il est donc l'exemple le plus intéressant de la théorie précédente et, dans cette section, nous l'étudierons en détails comme application de cette théorie.

L'objectif à miroirs a été réalisé d'abord par Newton, mais il fut supplanté par les objectifs à lentilles, et ce n'est que récemment qu'il a attiré de nouveau l'intérêt des opticiens. Nous avons publié un premier article sur ce système [25] dans lequel nous avons indiqué les principaux travaux sur ce sujet ; plus récemment, il y a eu les articles importants de Norris, Seeds et Wilkins [26] et de Grey [5]. Des autres articles généraux sur ce sujet sont ceux de Dolejši et Slonek [27] et de Barer [28] qui donnent une bibliographie étendue. L'importance du système est due à son indépendance des effets chromatiques et, pour cette raison, il est particulièrement utile pour les radiations ultraviolettes et infrarouges pour lesquelles on ne trouve pas assez de milieux transparents permettant de rendre les systèmes achromatiques.

Dans ce travail, nous ne considérerons que les objectifs composés entièrement de miroirs, parce qu'ils sont les seuls qui sont complètement achromatiques. D'ailleurs, nous ne tiendrons compte que des surfaces qui peuvent être fabriquées sans difficulté dans un atelier d'optique, c'est-à-dire la sphère et le paraboloïde ; Burch [29] a déjà décrit des objectifs à miroirs asphériques qui ont une obturation faible mais qui sont difficiles à construire.

Nous commencerons cette partie par l'étude des objectifs déjà connus en calculant leur qualité compte tenu de leurs aberrations. Ensuite nous étudierons des types plus compliqués pour chercher des objectifs qui ont une obturation et des aberrations compatibles avec les tolérances déjà trouvées.

I. — Optique géométrique des systèmes à miroirs

Le cas des surfaces réfléchissantes représente une simplification importante des formules de l'optique géométrique et nous donnons d'abord les équations dont nous nous servirons plus tard.

1. Notation. — En général, nous nous servons de la notation de Conrady [30], mais nous avons échangé les rôles de H et Y pour éviter un changement de notation entre cette section et celles sur la diffraction : H représente donc l'ouverture et Y la longueur de l'objet. Nous appelons A l'angle $U + I$, préférant ceci à la notation O de Conrady.

Nous adoptons la convention de signe de Conrady suivant laquelle le signe de l'indice change à une surface réfléchissante. Nous ne nous servons pas de la convention de Schwarzschild [31] où l'indice est toujours positif et les espaces objet et image sont séparés, parce qu'elle nous semble cacher l'effet que nous cherchons, celui de l'obturation. Mais cette convention devient plus commode quand on étudie la grandeur du champ et l'effet d'« œil de chat » du système final.

Puisque la distance de l'image est grande par rapport à celle de l'objet, on peut faire les calculs approximatifs en supposant l'image à l'infini.

D'ailleurs, on calcule d'habitude la marche des rayons dans le sens inverse ; ce que nous appelons objet est l'image donnée par l'objectif.

2. La sphère. — Considérons un miroir sphérique de rayon r qui sépare un milieu d'indice $+N$ d'un milieu d'indice $-N$. Les aberrations dues à cette surface sont :

a) *L'aberration sphérique.* Elle s'exprime en chemin optique par

$$(4.1) \quad W = \frac{2Nr \sin^2 I \sin^2 A}{(1 + \cos I)(1 + \cos A)(\cos I + \cos A)},$$

et, au troisième ordre près,

$$(4.2) \quad W_p = Nr i^2 \alpha^2/4.$$

Si l'on calcule le rayon « paraxial », désigné par des lettres minuscules, au 3^e ordre au lieu du 1^{er} ordre de l'ouverture, on peut calculer l'aberration du 5^e ordre W_2 par

$$(4.3) \quad W_p + W_2 = \frac{Nr \sin^2 I \sin^2 A}{4} \left(1 + \frac{\sin^2 I}{2} + \frac{\sin^2 A}{2} \right).$$

b) *La coma.* La partie de la coma due à la surface s'écrit

$$(4.4) \quad CC' = -Nr \alpha^2 i i_{pr} \text{ au 3^e ordre près,}$$

où i_{pr} est l'angle d'incidence paraxial du rayon principal.

Les autres aberrations montrent des simplifications semblables ; cependant elles sont moins importantes dans les microscopes.

c) *Pour une combinaison de surfaces,* les aberrations sphériques du 3^e et du 5^e ordres sont ΣW_p et ΣW_2 sur toutes les surfaces ; si l'on corrige l'aberration sphérique pour la zone marginale, on peut montrer que le chemin optique ΣW au foyer marginal est $-0,5 \Sigma W_2$ au 5^e ordre près. La coma $\delta g/g$ ou OSC' , s'écrit

$$OSC' = -OSC = \frac{N_1}{y_1 u_1} \Sigma CC' = \frac{N'_k}{y'_k u'_k} \Sigma CC'$$

pour un système de k surfaces.

3. **Le paraboloïde.** — Dans ce travail, nous ne considérons que les surfaces optiques que l'on peut fabriquer automatiquement. D'après les travaux de Dourneau [32], il faut y inclure, non seulement la sphère, mais aussi le paraboloïde. L'équation de cette surface est

$$h^2 = 4 f' x$$

où $2 f' = r$ est le rayon vertical, x la distance le long de l'axe.

Si l'on considère un rayon à la hauteur h et qui fait l'angle U avec l'axe, on trouve

$$(4.5) \quad W = \frac{Nh}{r} \left[\frac{1}{\cos U/2} \cdot \frac{1}{\cos U/2 + (h/r) \sin U/2} - 1 \right],$$

$$(4.6) \quad \sin U' = \frac{2 h r \cos U - (r^2 - h^2) \sin U}{r^2 + h^2}$$

et, à partir de ce résultat, on peut calculer la coma.

4. **L'obturation.** — L'obturation p ne s'introduit pas directement dans les calculs géométriques. Mais, pour chaque paire de surfaces, on peut calculer une « obturation géométrique » dont nous appelons la valeur paraxiale q dans l'espace objet et q' dans l'espace image.

Le calcul de q ou de q' est montré sur la figure 20.

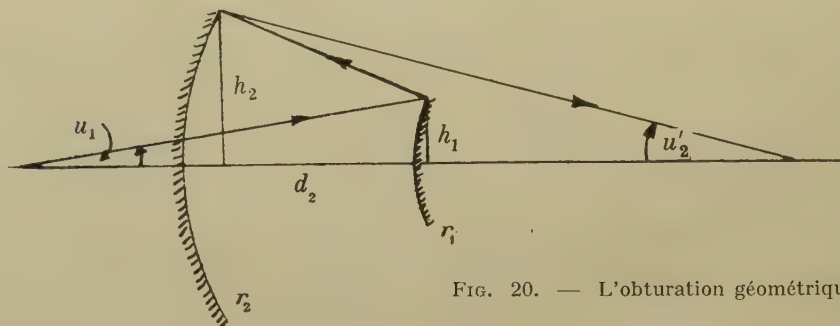


FIG. 20. — L'obturation géométrique.

Dans l'espace objet
et dans l'espace image
où

$$\begin{aligned} q &= (h_1 - d'_1 u'_1)/h_2, \\ q' &= (h_2 - d_2 u_2)/h_1, \\ d'_1 &= -d_2. \end{aligned}$$

L'obturation vraie p est donnée par celle des valeurs q , $1/q$, q' ou $1/q'$ qui est la plus grande, mais cependant plus petite que 1.

II. — Objectifs à un miroir

Si l'on se limite aux cas des surfaces sphériques ou paraboliques, on ne peut pas corriger en même temps l'aberration sphérique et la coma. Mais, comme c'est le

cas le plus simple, cet objectif fournit une base de comparaison pour les autres systèmes.

1. Le miroir sphérique. — Pour l'objet à l'infini, on trouve pour un miroir sphérique

$$(4.7) \quad W_p = -u'^4 f'/32, \quad W_2 = -u'^6 f'/128,$$

$$OSC'_p = \begin{cases} 0, & l'_{pr} = r, \\ -u'^2/8, & l'_{pr} = \infty, \\ -u'^2/4, & l'_{pr} = 0. \end{cases}$$

Bien que l'aberration sphérique ne soit pas corrigée, elle est plus faible que celle d'une lentille simple de même ouverture, et l'on peut utiliser le miroir sphérique comme objectif jusqu'à l'ouverture numérique de 0,18 (voir Bouwers [22]), et jusqu'à 0,4 avec des lentilles supplémentaires. Dans un tel instrument, l'obturation dépend de la méthode employée pour rendre accessible la position de l'image, c'est-à-dire l'objet du microscope ; on peut la rendre inférieure à 0,1 sans difficulté.

2. Le miroir parabolique. — Quand l'objet est à l'infini, l'aberration sphérique de tous les ordres est nulle et la coma est indépendante de la position de la pupille ; on a toujours

$$(4.8) \quad OSC' = -u'^2/4,$$

qui est une valeur trop importante pour permettre l'utilisation de ce miroir comme objectif de microscope.

III. — Objectifs monocentriques

D'après Bouwers, nous disons qu'un instrument d'optique est « monocentrique » quand toutes ses surfaces sont sphériques et concentriques. Lorsque la pupille est située au centre commun, il n'y a pas d'autres aberrations extra-axiales que la courbure de champ ; si la surface objet est une sphère centrée en ce point, la surface image est encore sphérique et concentrique. Pour les autres positions de la pupille, on peut avoir des aberrations mais, si l'on corrige l'aberration sphérique, on corrige en même temps la coma et l'astigmatisme ; il ne reste que la distorsion, assez faible dans les objectifs de microscope.

Dans un article déjà publié [25], nous avons calculé les aberrations du système monocentrique. En fonction des quantités relatives à la dernière surface, l'aberration sphérique s'écrit

$$(4.9) \quad LA' = (L' - r) \left(\frac{\sin U'}{u'} - 1 \right).$$

Si le système a un grossissement de $(-1)^{n-1} g$, c'est-à-dire g en valeur absolue, n étant le nombre des surfaces réfléchissantes, on peut montrer que la lon-

gueur focale s'exprime par

$$(4.10) \quad f'(1 + g) = l' - r,$$

et l'on obtient

$$LA' = f'(1 + g) \left(\frac{\sin U'}{u'} - 1 \right), \text{ puisque } L' \simeq l'.$$

La coma pour une image de grandeur y' et une distance pupillaire l'_{pr} s'écrit, en chemin optique, d'après Hopkins [33]

$$W_{coma} \simeq u' y' \left[\frac{\sin U'}{u'} \left(1 - \frac{LA'}{l' - l'_{pr}} \right) - 1 \right], \text{ en posant } \cos U' \simeq 1.$$

Pour un système monocentrique, on a

$$W_{coma} \simeq \frac{u' y'}{f'(1 + g)} \cdot \frac{r - l'_{pr}}{l' - l'_{pr}} LA';$$

la coma ne dépend que de l'aberration sphérique et elle est corrigée en même temps que celle-ci. C'est le cas que nous avons étudié dans la deuxième partie de ce travail, la constante ϖ de cette section est

$$\varpi = \frac{8}{(1 - p^2)^2 (1 + p^2)} \frac{y'^2}{f'^2 u_m'^2 (1 + g)^2} \left(\frac{r - l'_{pr}}{l' - l'_{pr}} \right)^2,$$

où u'_m est la valeur maximum de l'ouverture, désignée par U' dans la deuxième partie.

Les tolérances sur l'aberration sphérique sont donc données par la figure 8 avec ϖ calculé pour la grandeur du champ que l'on désire.

1. Objectif à deux miroirs. — Nous continuerons l'étude de ce cas que nous avons déjà étudié dans l'article cité plus haut en tenant compte des nouvelles tolérances sur les aberrations.

a) *Théorie approximative.* Pour deux miroirs, le grossissement est $-g$, c'est-à-dire que $u_1 = -g u'_2$. Quand le système est employé comme objectif de microscope, il a un grossissement $-1/g$.

Pour l'aberration sphérique, on peut montrer que

$$(4.12) \quad \frac{\Sigma W_p}{f'} = \frac{u'^4 (1 + g)}{32 (1 - \sigma)^2} [(1 - g)^2 - (3 - 2g + 3g^2) \sigma + (1 - g^2) \sigma^2]$$

au 3^e ordre près, où $\sigma = r_1/r_2$, rapport des rayons des surfaces.

$$\Sigma W_p = 0 \text{ lorsque } g = -1,$$

$$\text{ou } \sigma = 0,$$

$$\text{ou } \sigma = \frac{3 - 2g + 3g^2 \pm (1 + g) \sqrt{5 - 6g + 5g^2}}{2(1 - g)^2}.$$

Pour la coma, on trouve

$$\begin{aligned} OSC' &= - \frac{4}{u'^2 g (1 + g)} \frac{l'_{pr} - r_2}{l' - l'_{pr}} \cdot \frac{\Sigma W_p}{f'} \\ &= 0 \text{ lorsque } l'_{pr} = r_2 \text{ ou } \Sigma W_p = 0. \end{aligned}$$

Les obturations sont :

$$\begin{aligned} (4.13) \quad q &= \frac{\sigma - g (2 - 3 \sigma)}{2 - \sigma + g \sigma} \\ q' &= 3 - 2 \frac{\sigma - (2 - 3 \sigma) g}{1 - (1 - 2 \sigma) g}. \end{aligned}$$

b) *Objectif corrigé.* Pour utiliser le système comme objectif, il faut corriger l'aberration sphérique. Quand l'objet est à l'infini, Burch [29] a donné la condition que nous pouvons aussi déduire de l'équation (4.12)

$$\sigma = (3 \pm \sqrt{5})/2.$$

La valeur $(3 - \sqrt{5})/2$ donne le système que l'on appelle de Schwarzschild, bien que Schwarzschild [31] étudiait les télescopes à deux miroirs asphériques. Les rayons des surfaces sont :

$$r_1 = \sqrt{5} - 1, \quad r_2 = \sqrt{5} + 1;$$

pour une longueur focale unité, les obturations sont :

$$q = \sqrt{5} - 2, \quad q' = \sqrt{5}; \quad \text{donc } p = 1/\sqrt{5}.$$

La valeur $(3 + \sqrt{5})/2$ donne le système dit de Cassegrain qui ne sert pas comme objectif sans être accompagné d'autres éléments, parce que l'image est virtuelle quand on corrige l'aberration sphérique.

On voit immédiatement le défaut le plus sérieux du système à deux miroirs concentriques. L'obturation est égale à sa tolérance maximum et il ne reste plus de tolérance pour les aberrations. Mais, à cause de sa simplicité, il reste un système qui est utile dans les cas où l'on peut admettre une réduction de la qualité de l'image. Lorsque l'objet est réel et fini, l'obturation diminue ; on a $q = 3$ lorsque $g = 1/5$. Mais cette diminution est trop faible aux grossissements que l'on trouve ordinairement dans le microscope.

Il est possible cependant de réduire l'obturation au carré de cette valeur par une méthode due à Bouwers [34, 35] où l'on se sert de surfaces semi-réfléchissantes. C'est un moyen très élégant pour obtenir une obturation tolérable ; ses seuls défauts sont la perte de lumière à ces surfaces et la nécessité de fabriquer l'objectif en interposant du verre entre les surfaces, ce qui rend plus difficile le réglage de leur séparation.

c) *Application des tolérances.* Pour le système de deux miroirs, l'équation (4.11) nous donne

$$\varpi \simeq 15,9 \frac{y'^2}{f'^2 u_m'^2}$$

lorsque la pupill  est située sur le miroir convexe.

Puisque l'obturation est déjà $p^2 = 0,2$, on ne peut pas satisfaire même aux tolérances du type B. Mais, en utilisant l'équation

$$(4.14) \quad \Sigma W (1 + 1\,420\, y'^2/f'^2) \simeq 20\, \lambda \left(1 - \sqrt{Q/0,8}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on peut calculer l'aberration et l'ouverture maximum qui correspondent à une qualité Q inférieure à 0,8 au bord du champ. Ces résultats sont représentés dans le tableau 17, où nous avons employé 5×10^{-5} comme valeur typique de λ/f' . Si l'on a 2ⁿ fois cette valeur, on peut ajouter 0,05 n   l'ouverture.

TABEAU 17

OBJECTIF   DEUX MIROIRS CONCENTRIQUES

Grandeur de champ y'/f'	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
Ouverture de correction v_0	1,200	1,203	1,210	1,218	1,226	1,233
a) Qualité minimum = 0,75						
Aberration maximum ΣW	3,6	3,1	2,4	1,6	1,1	0,8
Ouverture maximum u_2'	0,57	0,55	0,53	0,50	0,47	0,45
Qualité au centre du champ	0,75	0,76	0,78	0,79	0,795	0,798
b) Qualité minimum = 0,7						
Aberration maximum ΣW	5,1	4,4	3,2	2,2	1,6	1,1
Ouverture maximum u_2'	0,59	0,58	0,56	0,53	0,50	0,47
Qualité au centre du champ	0,70	0,72	0,76	0,78	0,79	0,795

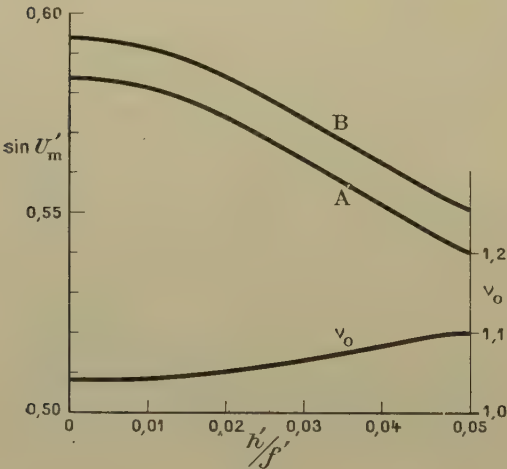


Fig. 21. — Objectif de Bouwers.
Ouverture maximum.

Ce tableau montre très nettement comment l'obturation réduit l'effet de l'aberration sur la qualité de l'image ; l'effet d'une aberration sphérique d'une longueur d'onde sur l'intensité est très petit.

Pour le système de Bouwers, $p^2 = 0,04$ et l'on a

$$\varpi \simeq 12,8\, y'^2/f'^2\, u'^2$$

pour un indice du milieu entre les surfaces de 1,48. Sur la figure 21, nous représentons l'aberration sphérique et l'ouverture de ce système pour des champs diff -

rents ; les courbes sont calculées d'après les tolérances du type A et du type B. Elles sont basées sur une valeur de λ/f' égale à 10^{-4} ; si l'on a m fois cette valeur, on peut ajouter $0,186 \log m$ à l'ouverture.

Il faut signaler une erreur dans l'article déjà publié [25]. Quand on ajoute une lentille d'immersion dont la surface est centrée sur l'image, on ne change ni la valeur de ΣW , ni sa tolérance et on trouve la même ouverture que pour l'objectif à sec. Mais, si les surfaces réfléchissantes sont dans un milieu d'indice N , il faut multiplier ΣW par N et l'ouverture est réduite. Nous avons tenu compte de cet effet dans le calcul du système de Bouwers.

d) *Ouverture maximum.* Pour calculer les ouvertures maxima, il fallait établir la relation entre l'ouverture u'_2 et l'aberration ΣW . On peut montrer que l'on a rigoureusement

$$(4.15) \quad \frac{\Sigma W}{f'} = \frac{8 \sin^4 \frac{U' - U}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{U' + U}{4} \cos \frac{U' + U}{2}}{\cos \frac{U'}{2} \cos \frac{U}{2}}$$

$$= 8 \frac{\sin^6 \frac{U'}{4}}{\cos^2 \frac{U'}{4}}, \text{ lorsque } g = 0$$

où $U' = U'_2$, $U = U_1$, $\sin U = -g \sin U'$.

Nous avons déjà publié les courbes correspondant à cette relation ; ce sont des droites à l'échelle logarithmique et on trouve l'équation approximative

$$(4.16) \quad \sin U'_c \simeq 1,317 - 0,22 g + 0,091 \frac{g}{1 - g} + 0,186 \log n\lambda/f'.$$

Pour calculer un nouveau système, on trouve $\sin U'_c$ d'après cette équation en donnant aux autres quantités les valeurs désirées, c'est-à-dire $-g$ le grossissement, f' la longueur focale, λ la longueur d'onde pour laquelle on se sert de l'instrument (on doit corriger pour la valeur la plus petite), n le nombre des longueurs d'onde que l'on peut admettre pour l'aberration ΣW , d'après l'équation (4.14), ou la tolérance de la figure 21 pour le système de Bouwers. L'ouverture U_c que l'on obtient est l'ouverture « de correction » pour laquelle on corrige l'aberration sphérique, l'ouverture maximum est donnée par $\sin U'_m = v_0^{-1/2} \sin U'_c$ (voir la 3^e partie).

e) *Calcul des objectifs.* Nous avons indiqué [25] que l'on peut calculer les objectifs monocentriques par voie synthétique en résolvant un système d'équations trigonométriques. Mais on voit maintenant qu'il faut calculer le rayon d'ouverture de correction

$$\sin U'_2 = \sin U'_c.$$

Les équations sont ensuite :

$$(4.17) \quad \begin{cases} \sin U_1 = -g \sin U_2' \\ \cos \left(I_1 - \frac{U_2' - U_1}{2} \right) = \frac{(1+g) \sin U_2'}{U \cdot 4 \sin [(U_2' - U_1)/4]} \\ I_1 - \frac{U_2' - U_1}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{pour l'objectif de Schwarzschild}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= (U_2' - U_1)/2 - I_1, & r_1 &= f'(1+g) \sin U_2'/\sin I_1, \\ r_2 &= -f'(1+g) \sin U_2'/\sin I_2, & d &= r_2 - r_1. \end{aligned}$$

L'obturation d'un objectif simple est à peu près $p^2 = 0,2$; on a exactement

$$(4.18) \quad p = \sin B / \sin U_2',$$

où
$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin U_2' \sin (U_1 + I_1)}{\sin I_1 + \sin U_2' \cos (U_1 + I_1)}.$$

Strictement, on doit calculer l'obturation pour la vraie ouverture maximum, mais le calcul pour l'ouverture de correction est assez exact.

On peut calculer l'objectif de Bouwers par le même système d'équations. Cependant $\sqrt{1.2} = 1,02$ et l'on peut poser $\sin U_m' \simeq \sin U_c'$ sans perte de qualité.

f) *Résumé.* Nous avons vu que l'objectif à deux miroirs concentriques est très simple à calculer et qu'il fournit une image bien corrigée du point de vue des aberrations. Mais l'obturation est trop forte pour obtenir une bonne qualité d'image.

Nous avons indiqué la méthode de Bouwers pour réduire l'obturation sans changer le système optique. Dans les sections suivantes, nous étudierons des modifications du système simple pour réduire l'obturation sans employer des surfaces semi-réfléchissantes.

2. Objectif à trois miroirs. — Grey [23] a signalé la diminution de l'obturation que l'on obtient pour l'objectif à deux miroirs quand on réduit le grossissement et nous avons présenté [25] un système à trois miroirs qui donne en même temps cette obturation réduite et un grossissement pratique. Nous étudierons ici le problème général de trois miroirs concentriques.

a) *Calcul approximatif.* En supposant un objet à l'infini et les courbures des surfaces égales à c_1, c_2 et c_3 , où $c_1 = 1/r_1$ etc, on trouve

$$u_3' = 2(c_1 - c_2 + c_3)h_1, \quad f' = -1/2(c_1 - c_2 + c_3),$$

parce que $N_1/N_3' = -1$.

Pour une longueur focale unité, on trouve que l'aberration sphérique est nulle lorsque

$$(4.19) \quad 2(1 + 2c_1)(1 - 2c_2)(c_1 - c_3) = 1$$

ou
$$2(1 + 2c_1)(1 + 2c_3)(c_1 + c_3) = 1$$

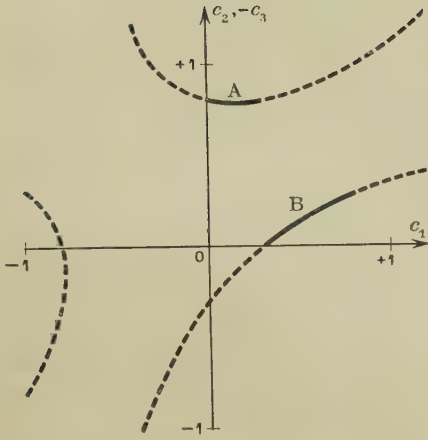


FIG. 22. — Trois miroirs concentriques.

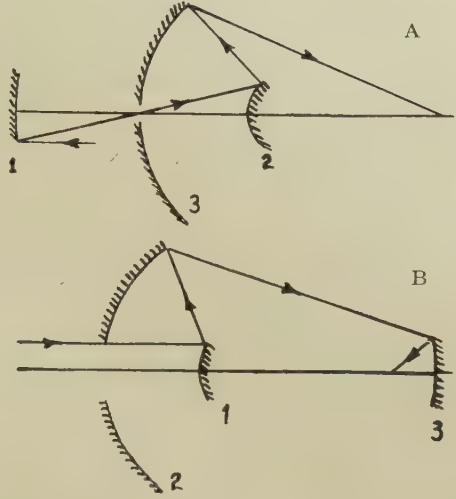


FIG. 23. — Objectifs à trois miroirs concentriques.

Donc c_2 et $-c_3$ sont donnés par la même fonction de c_1 représentée sur la figure 22. On trouve pour chaque valeur de c_1 que c_2 et $-c_3$ sont donnés par les deux branches différentes de la courbe.

Bien qu'il semble qu'il existe beaucoup de cas possibles, seuls ceux où les deux séparations $r_1 - r_2$ et $r_3 - r_2$ et la distance à l'image l'_3 sont toutes du même signe ont une valeur pratique. On ne trouve que les deux régions où la courbe est tracée en trait plein ; les objectifs qui leur correspondent sont montrés sur la figure 23.

Pour le cas A, la courbure c_2 est toujours voisine de 0,8. Puisque

$$g'_3 = 1/p = (c_2 + 1)/(c_2 - 2c_1),$$

on a $c_1 \simeq 0,4 - 0,9 p$

$$(4.20) \quad c_3 \simeq 0,9 p - 0,1$$

et
$$\Sigma W_2/f' = \frac{u'^6}{128} [2 - 2(c_1 - c_2) - 4c_1c_2 - 4(c_1 - c_2)^2]$$

$$\simeq \frac{u'^6}{128} (1,04 + 1,2c_1 - 4c_1^2).$$

Pour le cas B, il faut employer les équations générales.

Nous présentons dans le tableau 18 les valeurs approximatives de l'obturation et de l'aberration du 5^e ordre dans les deux cas.

Bien que le cas B montre la possibilité de corriger l'aberration du 5^e ordre et d'arriver ainsi aux plus grandes ouvertures, son obturation est toujours trop grande. Dans le cas A, on peut réduire l'obturation à des valeurs acceptables ; son aberration est approximativement celle de l'objectif à deux miroirs (donnée par $c_1 = 0$).

TABLEAU 18

OBTURATION ET ABERRATIONS DE TROIS MIROIRS

Cas A				
c_1	0	0,1	0,2	0,3
$128 \Sigma W_2/f' u'^6$	1,04	1,12	1,12	1,01
$p = 1/q_3$	0,447	0,33	0,22	0,10
Cas B				
c_1	0,5	0,6	0,7	0,81
$128 \Sigma W_2/f' u'^6$	0,482	0,022	-0,438	-1,00
$p = 1/q_2$	0,410	0,417	0,433	0,447

b) *Ouverture maximum*. Comme le cas A est le seul objectif ayant une valeur pratique, nous donnerons la méthode pour calculer ce type.

Pour trouver la loi de variation de ΣW avec l'ouverture, nous avons calculé exactement quelques cas particuliers. Les aberrations sont présentées dans le tableau 19 où $+g$ est maintenant le grossissement du système,

$$\sin U_1 = -g \sin U'_3 \text{ parce que } N_1 = -N'_3,$$

et m est le grossissement intermédiaire,

$$\sin U'_3 = m \sin U_2;$$

U'_c est la valeur de U'_3 pour laquelle nous avons corrigé l'aberration sphérique.

TABLEAU 19

ABERRATION $\Sigma W/f' (\times 10^5)$ POUR TROIS MIROIRS.

$\sin U'_c$	0,4	$m = -4$			$m = -3,5$		$m = -3$	
		0,5	0,6	0,7	0,5	0,6	0,5	0,6
$g = 0$	1,71	4,56	13,04	35,9	4,56	13,08	4,59	13,09
0,02		4,62	13,30		4,62	13,39	4,65	13,39
0,04		4,68	13,60		4,68	13,68	4,71	13,72
0,10		4,83	14,45		4,83	14,56	4,87	14,60

Les variations de $\Sigma W/f'$ avec m ne sont pas importantes; d'ailleurs on trouve que $\Sigma W/f'(1+g)$ reste presque constant pour chaque valeur de $\sin U'_c$ et qu'il se présente comme une droite à l'échelle logarithmique. On trouve la formule approximative

$$(4.21) \quad \sin U'_c \simeq 1,457 + 0,221 \log \frac{n \lambda}{f'(1+g)}.$$

Avec cette équation et l'équation (4.11), on peut calculer $\sin U'_c$ pour chaque cas particulier. Mais le calcul est un peu compliqué, parce que u'_m entre dans la valeur de π que l'on doit utiliser pour calculer $\sin U'_c$ et v_0 , et ensuite

$$u'_m \simeq \sin U'_m = v_0^{-1/2} \sin U'_c.$$

Mais comme il s'agit d'une tolérance et pas d'un calcul exact on peut trouver $\sin U'_m$ et v_0 par interpolation sur la figure 24 que nous avons calculée à partir du tableau 19. Dans cette figure, nous représentons $\frac{v_0}{1+p^2}$ et $\sin U'_m$ en fonction du champ y'/f' pour $p^2 = 0,08$; 0,09 et 0,10. Nous donnons aussi $\sin U'_m$ calculé sur la tolérance B: cette valeur varie peu lorsque p^2 est compris entre 0,08 et 0,11. Nous avons pris $\lambda/f' = 10^{-4}$; pour n fois cette valeur, $\delta \sin U'_m = v_0^{-1/2} \times 0,221 \log n$, d'après l'équation (4.21). La variation de v_0 avec λ/f' n'est pas importante.

c) *Obturation.* Correspondant au fait que r_2 reste constant dans le calcul approximatif, on trouve dans les calculs exacts que $\sin I_2/\sin U'_3$ varie de moins de 0,2% pour g compris entre 0 et 0,1 et m entre —3 et —4. Cependant, sa valeur dépend de $\sin U'_3$; nous la présentons dans le tableau 20 pour plusieurs ouvertures.

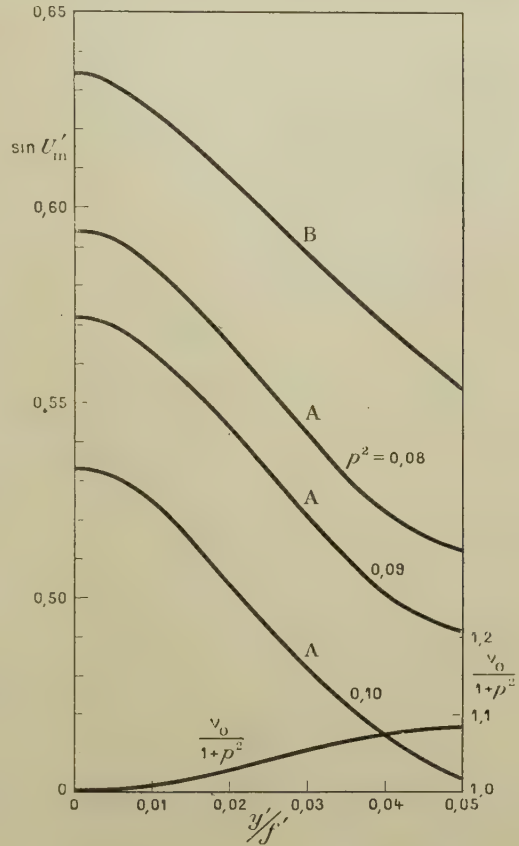


FIG. 24. — Trois miroirs. Ouverture maximum.

TABLEAU 20

OBTURATION. VALEURS DE $\sin I_2$

$\sin U'_3$	0	0,4	0,5	0,6	0,7
$\sin I_2/\sin U'_3$	0,798	0,804	0,809	0,816	0,825

Si l'on demande une obturation p , l'équation (4.18) ou (4.22) peut être utilisée en combinaison avec le tableau 20 pour trouver m ou $\sin U_2$.

d) *Calcul exact.* Nous donnerons maintenant le schéma complet pour calculer les objectifs à trois miroirs concentriques. On part des valeurs désirées de y' , f' , g et p .

(i) Du graphique 24, on tire $\sin U'_m$ et v_0 ; ensuite l'ouverture de correction $\sin U'_3 = \sin U'_c = v_0^{1/2} \sin U'_m$.

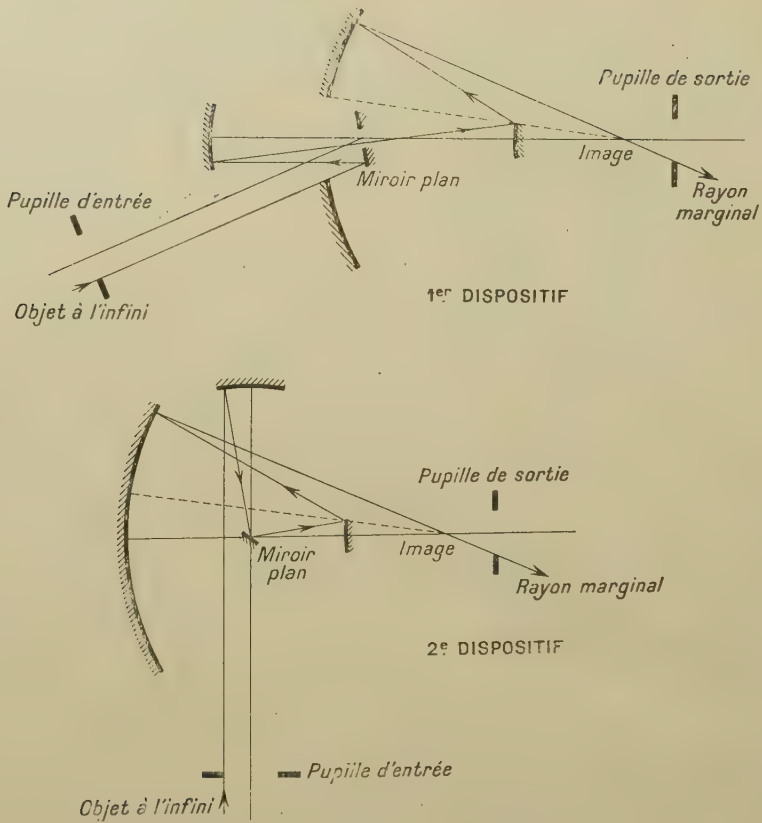


FIG. 25. — Objectif à trois miroirs.

(II) -En utilisant

$$(4.22) \quad \sin B = p \sin U'_3, \quad \sin (U_2 + I_2 - B) = p \sin I_2$$

avec la valeur approximative de $\sin I_2$, donnée par le tableau 20, qui correspond à cette valeur de $\sin U'_3$, on trouve une valeur de $\sin U_2$ qui est assez exacte pour donner l'obturation demandée.

(III) On continue par

$$(4.23) \quad \begin{cases} \sin U_1 = -g \sin U'_3, & I_1 = (U_2 - U_1)/2 \\ \cos \left(I_2 - \frac{U'_3 - U_2}{4} \right) = \frac{(1 + g) \sin U'_3 - 2 \sin I_1}{4 \sin [(U'_3 - U_2)/4]} \\ \frac{\pi}{2} > I_2 - \frac{U'_3 - U_2}{4} > 0 \end{cases}$$

$$I_3 = 0,5 (U'_3 - U_2) - I_2, \quad r_1 = -f'(1 + g) \sin U'_3 / \sin I_1,$$

$$r_2 = f'(1 + g) \sin U'_3 / \sin I_2, \quad r_3 = -f'(1 + g) \sin U'_3 / \sin I_3.$$

e) *Dispositifs pratiques.* Puisque l'on a un nombre impair de miroirs, la lumière sort dans la direction de l'objet et il faut un miroir plan pour réfléchir cette lumière vers l'extérieur. Deux dispositifs possibles sont montrés sur la figure 25.

Le premier dispositif est celui que nous avons déjà indiqué [25] ; il a réussi pour $p^2 = 0,11$, mais, comme on peut le voir dans le cas montré sur la figure où $p^2 = 0,105$, l'effet d'« œil de chat » commence à intervenir ; on ne peut plus mettre le miroir plan dans le plan de l'image intermédiaire. Ce système est donc limité pratiquement aux obturations de l'ordre de $p^2 = 0,11$, sauf pour les petits grossissements.

Le deuxième cas est calculé pour $p^2 = 0,09$ et l'on peut même obtenir des obturations plus petites. Dans le cas dessiné sur la figure, où le miroir convexe joue le rôle de pupille, il n'y a pas d'effet d'« œil de chat », mais il existe un effet semblable, la deuxième obturation du petit miroir plan apparaissant vers le bord du champ. Ce dispositif est beaucoup plus délicat à fabriquer que le premier ; il ne représente pas une solution commode.

La question générale de l'effet d'« œil de chat » dans ces systèmes est trop compliquée pour permettre une étude complète ; ce qu'il faut en pratique, c'est faire un dessin de chaque système calculé pour voir si l'effet apparaît ou non.

3. **Objectifs à quatre miroirs.** — Le système de trois miroirs a montré quelques défauts : il faut toujours un quatrième miroir plan et la lumière est déviée. De plus, on ne peut pas obtenir une obturation aussi petite qu'on le désire. Nous considérerons donc les possibilités des combinaisons de deux systèmes monocentriques, chacun à deux miroirs.

On peut trouver immédiatement certaines conditions générales. Si le système entier est corrigé de l'aberration sphérique, on peut placer la pupille dans n'importe quelle position sans changer la coma. En la plaçant au centre d'un des systèmes, celui-ci n'apportera aucune contribution à la coma. L'autre partie devra donc être sans coma, c'est-à-dire qu'il faudra ou que l'aberration sphérique soit corrigée ou que ce système ait le même centre.

Ainsi, il n'existe que deux cas possibles : deux systèmes corrigés séparément de l'aberration sphérique ou quatre miroirs tous concentriques.

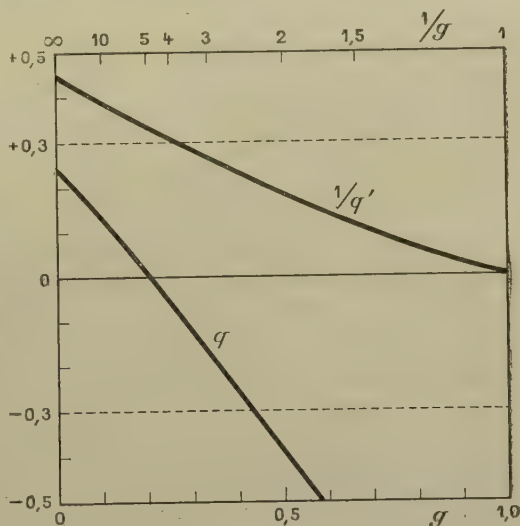


FIG. 26. — Obturations de 2 miroirs concentriques.

a) *Deux systèmes corrigés.* Si l'objet est à l'infini, le premier système est l'objectif ordinaire à deux miroirs avec l'obturation $p^2 = 0,2$.

Pour les objets à distance finie, les équations (4.12) et (4.13) nous donnent, pour un système corrigé,

$$(4.24) \quad q = \frac{\pm \sqrt{5 - 6g + 5g^2} - 2}{1 - g}, \quad q' = \frac{\pm \sqrt{5 - 6g + 5g^2} + 2g}{1 - g},$$

le signe positif correspond aux systèmes de Schwarzschild. Les valeurs de q et $1/q'$ sont représentées sur la figure 26 pour g compris entre 0 et 1. Pour obtenir des obturations $p < 0,3$, on trouve qu'il faut des grossissements compris entre 5,5 et 15, valeurs trop petites en pratique. Les longueurs focales des deux systèmes sont arbitraires, on les choisit d'après la grandeur du champ désirée.

b) *Quatre surfaces concentriques.* On peut déduire de l'équation (4.13) les deux cas particuliers : $q' = 3 - 2c_2/c_1$, lorsque $l = \infty$; $q' = 3$, lorsque $l = -d$, l'objet étant sur la surface du miroir concave. Les équations sont vraies pour tous les systèmes de deux miroirs ; elles sont indépendantes de l'aberration et elles sont déduites uniquement de la condition qu'une certaine position de l'objet existe. Donc, pour obtenir $q' > 3,3$ ($p < 0,3$), il faut un objet situé entre les deux miroirs.

Pour le cas de quatre surfaces qui se divisent en deux systèmes de Schwarzschild, cette condition est impossible :

(I) Pour les deux miroirs les plus proches de l'objet, il n'est pas commode d'avoir cet objet — l'image pour le microscope — à l'intérieur. De plus, on n'obtient que des faibles grossissements.

(II) Pour les deux autres miroirs, leur objet est l'image donnée par le premier système qui doit être de l'autre côté du centre commun. Loin d'avoir l négatif et petit, il est toujours positif et $q' < 3 - 2c_2/c_1$, $c_2/c_1 > 0$.

Bien qu'il reste la possibilité d'employer les systèmes de Cassegrain, nous ne pouvons pas imaginer un dispositif pratique et nous pouvons constater que l'objectif à quatre miroirs monocentriques est sans utilité pratique.

IV. — Objectif à deux miroirs non concentriques

Pour réduire l'obturation du système monocentrique à deux miroirs, quelques auteurs (Seeds et Wilkins [36], Norris, Seeds et Wilkins [26]) ont employé deux miroirs qui ne sont pas concentriques et qui ont par conséquent de la coma. Grey [5] a étudié ce système du point de vue du champ possible ; ses calculs se basent sur les tolérances du type B.

Nous étudierons ici cette espèce d'objectif par des calculs algébriques du 3^e ordre. Nous montrerons l'effet de l'emploi des tolérances A sur le champ utile ; mais, en général, la coma est trop importante pour fournir un objectif pratique et l'utilité des calculs de cette section apparaîtra surtout dans la section suivante où nous étudierons des cas plus compliqués.

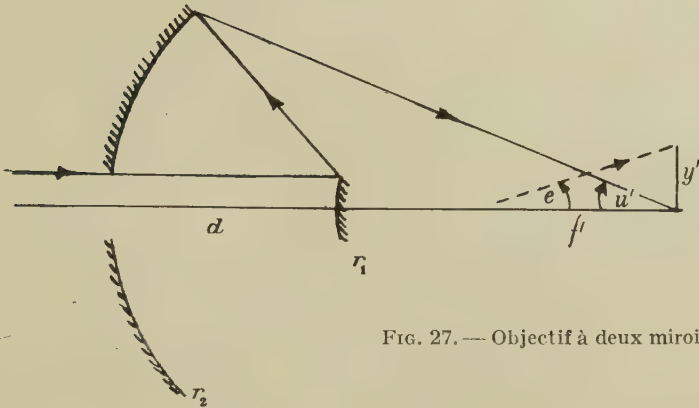


FIG. 27. — Objectif à deux miroirs.

1. **Théorie générale.** — On envisage le système représenté sur la figure 27 où l'on a deux surfaces réfléchissantes, de rayons r_1 et r_2 , séparées par une distance d . On considère d'abord un objet à l'infini avec un rayon d'ouverture linéaire $h_1 = h$.

En introduisant les deux paramètres,

$$\rho = r_1/2f', \quad \sigma = r_1/r_2,$$

on trouve

$$r_1 = 2\rho f', \quad r_2 = 2\rho f'/\sigma, \\ d = \frac{\rho(\rho + 1 - \sigma)f'}{\sigma}, \quad \frac{l'_2}{d} = \frac{\rho + 1}{\rho(\rho + 1 - \sigma)} = \frac{1}{1 - q q'},$$

et l'image est extérieure si $0 < q q' < 1$.

Pour les obturations, on trouve

$$(4.25) \quad q = \frac{\sigma}{\rho + 1}, \quad q' = \rho + \frac{1 - \rho^2}{\sigma},$$

et les aberrations sont

(I) l'aberration sphérique

$$LA'_p = \frac{u'^2 f'}{8 \sigma \rho^3} [(\rho^2 - 1)^2 - \sigma], \\ (4.26) \quad \Sigma W_p = \frac{u'^4 f'}{32 \sigma \rho^3} [\sigma - (\rho^2 - 1)^2], \\ \Sigma W_s = \frac{u'^6 f'}{128 \sigma \rho^5} [\sigma + 2 \sigma \rho (\rho^2 - 1) - (\rho^2 - 1)^2 (\rho - 1)^2];$$

(II) la coma

$$OSC' = \frac{u'^2}{8 \rho^3} (1 - \rho^2 - \rho^3 - \sigma), \quad \text{lorsque } l'_{pr} = \infty, \\ (4.27) \quad = \frac{u'^2}{8 \sigma \rho^2} [(\rho^2 - 1)^2 - \sigma (1 - \rho + \rho^2 + \rho^3)], \text{ lorsque } l_{pr} = 0;$$

(III) la courbure de champ, mesurée le long de l'axe

$$(4.28) P = \frac{e^2 f'}{2\rho} (1 - \sigma) \text{ pour un champ angulaire } e ;$$

(iv) pour l'astigmatisme et la distorsion, on peut trouver des expressions de la même façon ; leurs valeurs dépendent de la position de la pupille.

2. **Système corrigé.** — En dehors du cas monocentrique, on ne peut pas corriger l'aberration sphérique et la coma en même temps. D'habitude, on corrige l'aberration sphérique et c'est la coma qui limite la grandeur du champ.

a) *Aberrations.* On déduit de l'équation (4.26) que l'aberration sphérique du 3^e ordre est nulle lorsque $\rho^2 - 1 = \pm \sqrt{\sigma}$, c'est-à-dire que σ , rapport des deux rayons, doit être positif. En posant

$$(4.29) \quad \sigma = a^2, \\ \text{on a} \quad \rho = \pm \sqrt{1 + a},$$

et l'on peut exprimer toutes les quantités du système en fonction du seul paramètre a . On trouve

(i) les obturations

$$(4.30) \quad q = a [(1 + a)^{1/2} - 1], \quad q' = (1 + a)^{1/2} - \frac{1}{a} ;$$

(ii) les aberrations

$$(4.31) \quad -\frac{\Sigma W}{f'} = \frac{1}{2} \frac{\Sigma W_2}{f'} = \frac{u'^6}{256} \frac{2 - (1 + a)^{-1/2}}{1 + a}, \\ OS C' = -\frac{u'^2}{8} \left[1 + \frac{a}{(1 + a)^{1/2}} \right], \\ \text{Courbure } P = \frac{e^2 f'}{2} (1 - a) (1 + a)^{1/2}.$$

b) *Système de Schwarzschild.* Pour chaque valeur de a , il existe deux solutions correspondant aux deux racines $\pm \sqrt{1 + a^2}$ de $(1 + a)^{1/2}$. La racine positive correspond à un objectif du type Schwarzschild.

Pour cet objectif, nous prenons la longueur focale positive pour obtenir un résultat pratique. De plus, il faut une distance d réelle et positive entre les deux miroirs ; on trouve la condition

$$-1 < a < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Les propriétés des systèmes de Schwarzschild sont présentées dans le tableau 21.

c) *Système de Cassegrain.* Ce système correspond à la racine négative $-\sqrt{1 + a} = \rho$. Pour une longueur focale positive, on a les conditions

$$-\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < a < -1 \quad \text{ou} \quad a > 0,$$

et les résultats sont donnés dans le tableau 22.

TABLEAU 21
PROPRIÉTÉS DU SYSTÈME DE SCHWARZSCHILD

a	d/f'	i_2/f'	q	q'	p	$\frac{128 \Sigma W_2}{f' u^6}$	$\frac{8 OSC'}{u^2}$	$\frac{2P}{f'e^2}$	Forme
-1	0	1	1	1	1	$-\infty$	$+\infty$	0	
-0,618	2,00	4,24	0,236	2,24	0,447	1,00 (1,37)	0 (-0,084)	1,00	
-0,5	4,12	6,83	0,146	2,71	0,369	1,17	-0,293	1,06	
-0,4	7,82	11,1	0,090	3,28	0,305	1,18	-0,484 (-0,580)	1,08	
-0,3	16,2	20,4	0,049	4,27	0,234	1,15 (1,32)	-0,643 (-0,733)	1,09	
-0,2	41,5	47,4	0,021	5,89	0,170	1,10	-0,776	1,07	
-0,1	184	195	0,005	10,95	0,091	1,05	-0,895	1,04	
0	∞	∞	0	∞	0	1	-1	1	
0,1	214	205	0,005	-8,95	0,112	0,95	-1,10	0,94	
0,2	56,3	52,4	0,019	-3,91	0,256	0,91 (0,97)	-1,18 (-1,246)	0,88	
0,4	15,0	13,6	0,073	-1,32	0,759	0,82	-1,34	0,71	
0,6	6,69	6,29	0,159	-0,402	0,402	0,76	-1,48	0,51	
0,7	4,83	4,70	0,213	-0,125	0,213	0,73 (0,75)	-1,54 (-1,585)	0,39	
0,8	3,57	3,66	0,273	0,092	0,273	0,70	-1,60	0,27	
0,9	2,67	2,94	0,340	0,154	0,340	0,67 (0,69)	-1,65 (-1,698)	0,14	
1,0	2,00	2,41	0,414	0,267	0,414	0,65	-1,71	0	
1,2	1,07	1,72	0,580	0,414	0,580	0,60	-1,81	-0,30	
1,618	0	1	1	1	1	0,5	-2	-1	

Les valeurs de $128 \Sigma W_2/f' u^6$ et $8 OSC'/u^2$ entre parenthèses sont les résultats exacts pour l'ouverture $u'_2 = 0,5$.

TABLEAU 22
PROPRIÉTÉS DU SYSTÈME DE CASSEGRAIN

a	d/f'	b_2/f'	q	q'	p	$\frac{128 \Sigma W_2}{f' u'^6}$	$\frac{8 OSC'}{u'^2}$	$\frac{2 P}{f' e^2}$	Forme
-1	0	1	1	1	1	∞	$-\infty$	—	
-0,8	0,061	0,864	1,16	0,80	0,86	21,2	-2,79	-0,80	
-0,618	0	1	1	1	1	9,5	-2,00	-0,62	
0	∞		0	∞	0	3	-1	-1	
0,1	6,17	-4,9	0,205	-11,0	0,205	2,68	-0,90	-0,94	
0,15	4,52	-3,2	—	7,74	0,311	2,55	-0,86	-0,91	
0,5	2,33	-0,90	—	3,22	0,899	1,88	-0,59	-0,61	
1,0	2,00	-0,42	—	2,41	0,414	1,35	-0,29	0	
1,4	1,98	-0,28	—	3,57	0,442	1,10	-0,10	0,62	
1,618	2,00	-0,24	—	4,47	0,447	1,00	0	1	
2	2,05	-0,18	—	5,46	—	0,86	0,16	1,73	
5	2,59	-0,06	—	17,2	—	0,40	1,04	9,8	
8	3,09	-0,03	—	32	—	0,26	1,67	21	
10	3,39	-0,02	—	48	—	0,21	2,02	30	
20	4,62	-0,01	—	117	—	0,11	3,36	87	

Les valeurs de $128 \Sigma W_2/f' u'^6$ et $8 OSC'/u'^2$ entre parenthèses sont les résultats exacts pour l'ouverture $u'_3 = 0,5$.

3. **Cas pratiques.** — a) *Obturation.* Pour un objectif de microscope, on demande une image accessible, c'est-à-dire $l'_2 > d$. Si, en même temps, nous posons $p^2 < 0,1$, nous trouvons les conditions $0,4 < a < 0$ ou $0,76 < a < 0,9$ pour le système de Schwarzschild ; le système de Cassegrain ne nous fournit aucune solution.

b) *Ouverture et champ maxima.* En partageant la tolérance également entre l'aberration sphérique et la coma, on peut calculer maintenant leurs valeurs maxima.

Sur la figure 28, nous représentons l'ouverture maximum pour chaque obturation sous la forme $f'u'_m/\lambda$; les deux courbes correspondent aux deux types de tolérances.

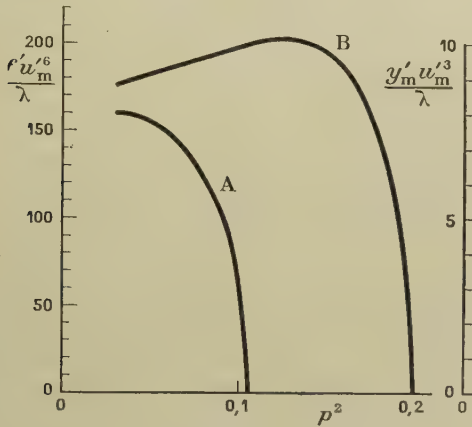


FIG. 28. — Deux miroirs. Ouverture.

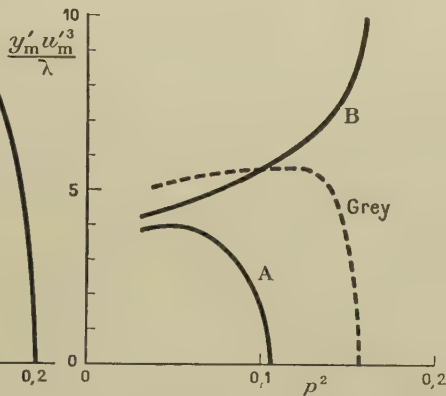


FIG. 29. — Deux miroirs. Champ.

Avec cette valeur de u'_m , on peut obtenir le champ maximum en utilisant la figure 29 où nous représentons les valeurs de $y'_m u'^3_m/\lambda$. Sur la même figure, nous avons reproduit les résultats de Grey ; on voit qu'ils sont à peu près pareils aux nôtres pour la tolérance B et pour $p^2 < 0,13$, mais qu'ils s'en écartent rapidement pour $p^2 > 0,13$. La cause de cette différence est que Grey a tenu compte de la coma du 5^e ordre que nous avons négligée ; dans cette région où la coma du 3^e ordre devient faible, la courbe est très sensible aux petits changements de la coma.

La figure 29 montre encore la diminution du champ provoquée par l'emploi des tolérances du type A. On trouve que le champ tolérable a un rayon de l'ordre de 30λ ; par exemple, pour $\lambda/f' = 10^{-4}$, $p^2 = 0,08$, on trouve

$$u'_m = 0,48, \quad y'_m/f' = 3 \times 10^{-3},$$

ou $y'_m = 15 \mu$ lorsque $f' = 5 \text{ mm}$. Ces valeurs sont très petites et nous considérons que ce système n'est pas très utile en pratique.

c) *Méthode de calcul.* Malgré ces observations sur l'utilité de ces systèmes, nous

dirons quelques mots sur la méthode de calcul, parce qu'elle s'applique aussi aux autres objectifs qui ne sont pas concentriques.

Pour ces objectifs, il n'existe pas de méthode particulière de calcul et l'on emploie les moyens ordinaires du calcul optique; on trouve une solution approximative à partir des équations du 3^e ordre et l'on corrige cette solution en effectuant les marches des rayons. Puisqu'il s'agit d'un système très simple, on trouve que la méthode différentielle de Cruikshank [37] est très commode. En prenant les variables d et $c = 1/r_2$ on trouve, en fonction des quantités relatives à la deuxième surface

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \frac{\partial LA'}{\partial d} &= \frac{\sin U}{\sin U'} \left[2 \frac{\sin(U+I)}{\sin U' \cos I} - 1 \right] - \frac{u^2}{u'^2}, \\ \frac{\partial LA'}{\partial c} &= \frac{2}{c} \left[\frac{L' \sin(U+I)}{\sin U' \cos I} - \frac{l'(u+i)}{u'} \right] \\ \text{et} \quad \frac{\partial OSC'}{\partial d} &= \frac{2 u' c}{\sin U'} \left[\frac{\sin U}{\sin U'} \cdot \frac{\cos U'}{\cos I} - \frac{u}{u'} \right], \\ \frac{\partial OSC'}{\partial c} &= \frac{2 u'}{\sin U'} \left[L' \frac{\cos U'}{\cos I} - l' \right]. \end{aligned}$$

4. **Miroirs paraboliques.** — En considérant la possibilité d'employer des miroirs paraboliques dans les objectifs à deux miroirs, on peut constater immédiatement qu'il est inutile comme premier miroir où la lumière incidente est presque parallèle, car ce miroir donnerait de la coma mais très peu d'aberration sphérique et ni la sphère ni le paraboloïde ne pourrait corriger cette coma sans introduire beaucoup d'aberration sphérique, parce que le deuxième miroir travaille pour des distances finies. Il reste donc à considérer le cas où le premier miroir est une sphère et le deuxième un paraboloïde.

a) *Aberrations.* En utilisant les équations (4.5) et (4.6) on trouve

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \frac{\Sigma W_p}{f'} &= \frac{u'^4}{32 \sigma \rho^3} [\sigma + 4 \rho (\rho + 1)^2], \\ OSC'_p &= - \frac{u'^2}{8 \rho^3} [2 (\rho + 1)^3 - 2 (\rho + 1)^2 + \rho + \sigma], \\ q &= \frac{\sigma}{\rho + 1}, \quad q' = \rho + \frac{1 - \rho^2}{\sigma}. \end{aligned}$$

b) *Systèmes corrigés.* L'aberration sphérique est nulle lorsque $\sigma = -4 \rho (\rho + 1)^2$, et les autres aberrations deviennent

$$\begin{aligned} OSC'_p &= \frac{u'^2}{8 \rho^2} [2 (\rho + 1)^2 - 1], \\ q &= -4 \rho (\rho + 1), \quad q' = \rho + (\rho - 1)/4 \rho (\rho + 1). \end{aligned}$$

(i) Si l'on cherche les cas où la coma est nulle en même temps, on a

$$\rho = -1 \pm 1/\sqrt{2} \quad \text{et les obturations sont}$$

$$\begin{cases} q = 0,83 \\ q' = 1,27 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} q = -4,83 \\ q' = -2,27 \end{cases}$$

c'est-à-dire que la vraie obturation p est toujours trop grande et l'image est entre les deux miroirs.

(II) Si l'on étudie les cas où l'image est extérieure, c'est-à-dire où $l'_2 > d$, on trouve la condition $0 < \rho < 0,348$, mais dans cette région la coma est toujours trop importante,

$$OSC' > 2,7 u'^2.$$

On voit donc qu'il n'existe aucune solution commode ; l'introduction du miroir parabolique ne conduit à aucun nouvel objectif à deux miroirs.

V. — Objectifs à 3 ou 4 surfaces

Dans cette section, nous envisageons la possibilité des objectifs à trois et à quatre surfaces. Nous n'avons pas entrepris une étude complète de ces cas ; nous prenons seulement un cas particulier. Car nous avons vu que le calcul algébrique de l'objectif à trois miroirs concentriques est déjà très compliqué ; les résultats contiennent, aussi bien que les cas pratiques, tous les cas inutiles où la distance entre les miroirs est négative, où l'image est entre les miroirs ou encore où l'obturation est trop grande.

Nous étudierons donc ceux de ces objectifs qui sont des combinaisons de systèmes qui sont eux-mêmes pratiques ; ce que nous appelons le premier système est, dans le sens que nous avons toujours employé, le plus proche de l'image donnée par un objectif de microscope. Nous avons pris comme cas particulier du deuxième système le système de Schwarzschild, l'image intermédiaire étant à sa surface concave, position très avantageuse. Ensuite, nous étudions les possibilités de corriger les aberrations de ce système par un troisième miroir ou par un autre système à deux miroirs. Comme nous avons encore quelques variables disponibles, nous pouvons, par exemple,

(I) corriger l'aberration sphérique du 5^e ordre, ce qui nous permettra d'augmenter l'ouverture,

(II) former l'image de la pupille de la première partie sur celle de la deuxième pour réduire les effets d'« œil de chat »,

(III) corriger l'astigmatisme et la courbure de champ.

Puisque l'objectif entier doit être corrigé pour l'aberration sphérique, on peut changer la position du diaphragme sans faire varier la coma. Nous supposons une pupille à l'infini dans l'espace entre les deux parties.

1. Deuxième système. — Les systèmes que nous étudions ici sont montrés sur la figure 30 ; ils sont renversés par rapport au sens utilisé jusqu'à présent parce que nous désirons les résultats en fonction de l'espace intermédiaire.

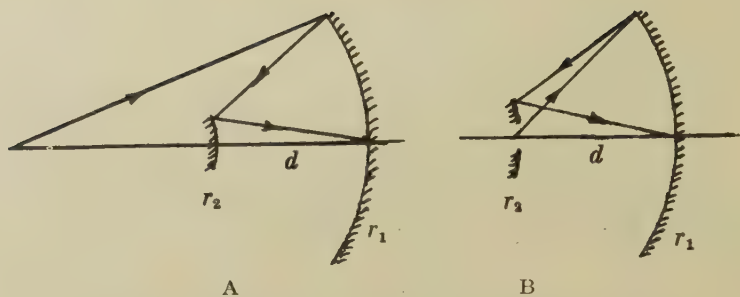


FIG. 30. — Quatre miroirs (deuxième système).

On utilise les mêmes paramètres ρ et σ que précédemment mais en donnant à ρ un signe opposé,

$$r_1 = -2 \rho f', \quad r_2 = -2 \rho f'/\sigma.$$

On peut montrer que

$$\frac{\Sigma W_p}{f'} = \frac{u'^4}{32} \frac{\rho}{\sigma^4} (1 + \rho + \sigma)^2 (1 - \rho - \sigma)^2 [\sigma^3 - (1 + \sigma^2 - \rho^2)^2],$$

$$(4.34) \quad OSC'_p = -\frac{u'^2}{8\sigma^3} (1 + \rho + \sigma) (1 - \rho - \sigma)^2 [\sigma^3 - (1 + \rho + \sigma) (1 + \sigma^2 - \rho^2)(\sigma - \rho)]$$

lorsque $l'_{pr} = \infty$,

$$q = 1 + (1 + \sigma^2 - \rho^2)/\sigma, \quad q' = 0,$$

$$d = \rho (\rho + \sigma - 1) f'/\sigma,$$

et le grossissement

$$g = (1 - \rho \sigma - \rho^2)/\sigma.$$

Lorsque $\Sigma W_p = 0$, on peut exprimer toutes ces quantités en fonction d'un seul paramètre a . On trouve

$$(4.35) \quad \begin{aligned} q &= a + 1, & \rho^2 &= 1 - a^3 + a^4, & \sigma &= a^2, \\ OSC' &= u'^2 c/8, & \text{où } c &= a(a - 2) A, \\ \Sigma W_2/f &= u'^6 w_2/128, & \text{où } w_2 &= \rho a^2 A^2 [(a - 1)^2 A - a^2 + a + 2], \\ g &= a - a^2 - \rho, & \text{où } A &= 2 a^2 - a + 2 \rho. \end{aligned}$$

La position de la pupille de sortie dépend du système ; pour celui de la figure 30 A, elle est sur le miroir convexe dans l'espace image et $l' - l'_{pr} = d$. Pour le type B, la pupille est le trou du miroir convexe dans l'espace objet et l'on trouve $l' - l'_{pr}$ en calculant son image.

Les résultats pour le deuxième système sont représentés dans le tableau 23 pour le cas $\Sigma W_p = 0$. Nous avons de plus calculé la dérivée $(\partial c/\partial w_1)_q$ pour montrer approximativement l'effet de l'introduction de l'aberration sphérique,

$$a_1 = \frac{32}{u'^4} \cdot \frac{\Sigma W_p}{f'}.$$

TABLEAU 23

PROPRIÉTÉS DU DEUXIÈME SYSTÈME : $q' = 0$, $\Sigma W_p = 0$.

	B				A			
q	0	0,1	0,2	0,3	2,8	3,0	3,2	3,4
c	19,4	14,6	10,9	7,9	-3,4	0	6,6	17,4
ω_2	1 870	810	340	140	$4,5 \times 10^3$	$2,8 \times 10^4$	$8,1 \times 10^4$	$2,9 \times 10^5$
$\left(\frac{\partial c}{\partial \omega_1}\right) q$..	0	0,039	0,088	0,143	-0,254	-0,167	-0,111	-0,074
g	-3,73	-3,26	-2,83	-2,43	-3,82	-5	-6,35	-7,87
$\frac{l' - l'_{pr}}{f'}$..		-1,13	-2,24	-3,33	3,39	4,5	5,79	7,26
P	0	-0,12	-0,26	-0,41	0,94	1	1,03	1,06

Pour corriger les aberrations de ce système, il faut d'abord que le premier système ait la même coma. Ensuite l'aberration sphérique doit avoir le signe opposé ; dans ce cas, on peut corriger cette aberration en choisissant un rapport convenable des deux longueurs focales. On corrige l'aberration du 5^e ordre et la courbure de champ en même temps que l'aberration du 3^e ordre seulement si les rapports $\Sigma W_2 / \Sigma W_p$ et $P / \Sigma W_p$ sont les mêmes dans les deux parties.

2. **Premier système.** — a) *Un miroir concave.* Un miroir sphérique a une coma dont la valeur est $OSC' = -u'^2/8$ lorsque $l'_{pr} = \infty$ et une aberration sphérique $\Sigma W_p/f' = -u'^4/32$. On introduit donc assez d'aberration sphérique positive dans le système calculé dans le tableau 23 pour faire $c = -1$; on peut le faire pour le type A où $\partial c / \partial \omega_1$ est négatif mais non pour le type B. Cependant, l'obturation que l'on trouve est limitée : pour les grandes valeurs de q , il faut beaucoup d'aberration sphérique et, par conséquent, un très grand rayon de ce miroir supplémentaire. Lorsque $q = 3$, ce rayon est 6 fois la longueur focale du deuxième système ; pour $q = 3,2$, le rapport est de l'ordre de 70.

Un tel objectif fournit une obturation du même ordre que celle de l'objectif à trois miroirs concentriques, mais il donne la possibilité de trouver des dispositifs plus commodes. On n'obtient pas de diminutions importantes de l'aberration du 5^e ordre.

Si l'on utilise un miroir parabolique où l'aberration sphérique est nulle et la coma $c = -2$, on déduit directement du tableau 21 que $q = 2,85$, obturation trop importante.

b) *Systèmes à deux miroirs.* Dans ce cas, il existe beaucoup de possibilités, car nous ne sommes limités ni aux systèmes corrigés, ni aux images accessibles. Nous ne considérons que les cas montrés sur la figure 31 ; leurs propriétés sont données dans le tableau 24.

(1) Schwarzschild a. Si l'aberration sphérique est corrigée, la coma sera toujours négative et aucune correction ne sera possible. Mais on voit que la coma devient positive avec une forte aberration sphérique négative que l'on doit pouvoir corriger avec chacun des deuxièmes systèmes étudiés. Du point de vue de la position de la pupille et de la courbure de champ, une combinaison avec le type B

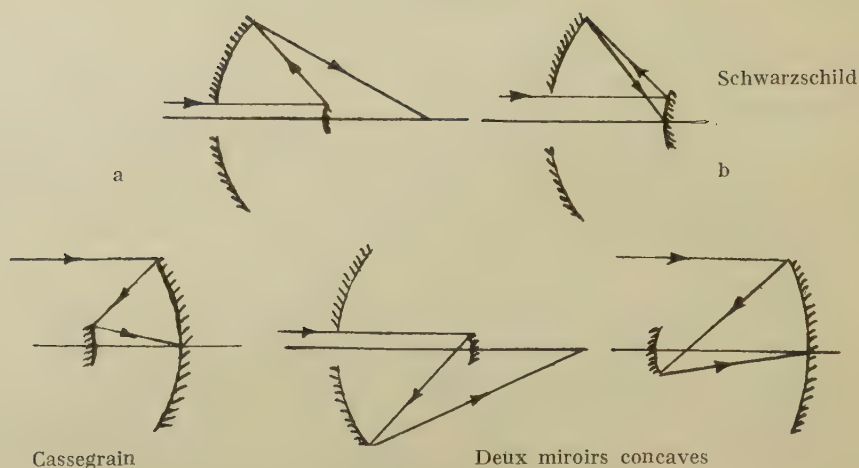


FIG. 31. — Quatre miroirs (premier système).

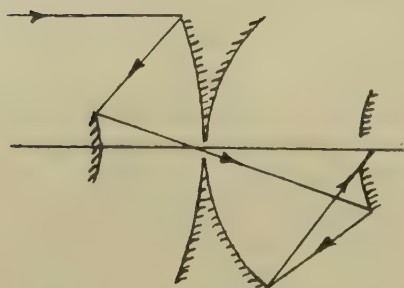


FIG. 32. — Dispositif possible à quatre miroirs.

de la figure 30 doit mieux réussir. L'aberration du 5^e ordre est réduite, mais il nous semble difficile de la corriger complètement.

(II) Schwarzschild b. Ses aberrations sont toutes faibles et on peut le considérer de la même façon qu'un miroir concave. Les combinaisons évidentes sont celles avec le type A mais, dans ce cas, l'effet d'« œil de chat » peut être sérieux.

(III) Cassegrain. C'est le système le plus intéressant ; avec son aberration du 5^e ordre très forte, il donne la possibilité de corriger celle d'un premier système du type B ; on trouverait un dispositif tel que celui de la figure 32. Cependant, l'aberration sphérique du 3^e ordre est importante et les propriétés d'un deuxième système ayant cette aberration peuvent être très différentes de celles du tableau 23. La position de la pupille et la courbure de champ ont toutes les deux des signes commodes pour la correction.

(IV) Deux miroirs concaves. Dans ce cas, la longueur focale est négative et il faut tenir compte de ce fait en considérant les signes des quantités qui en dépendent. Le deuxième cas étudié ressemble au système de Cassegrain, mais la coma est devenue trop grande.

3. **Conclusions.** — Cette étude de l'objectif à trois ou quatre miroirs n'indique que les possibilités d'un tel système, mais l'étude complète demande une série de calculs de marches des rayons, où l'on tient compte non seulement des paramètres que nous avons considérés, mais aussi d'un déplacement de l'image intermédiaire et de la position de l'image de l'obturation, car l'effet d'« œil de chat » est beau-

TABEAU 24
PROPRIÉTÉS DU PREMIER SYSTÈME

Type	Schwarzschild				Cassegrain				2 miroirs concaves			
	a				b							
q ...	0,06	0,12	0,17	0,25	0,25	0,2	3	3,5	4	4	—0,06	—4
q' ...	4	4	4	0	0,1	0	0	0	0	0	4	0
ω_1 ...	—5,44	—31,6	—74,3	—0,02	0,08	0,15	—5	—10,4	—19	—89	12,3*	149*
ω_2 ...	—1,49	—7,3	—17,3	0,70	0,73	0,77	—29	—99	—259	—3 030	7,9*	2 310*
c ...	—0,62	—1,09	—8,48	—1,57	—1,58	—1,52	—5	18,7	47	281	—1,20	—535
P_0 ...	1,09	1,35	1,92	0,31	0,33	0,44	1	2,75	6	11	2,75*	29*
$l' - \frac{l'}{f'}$	1,38	3,5	6	0,21	0,32	0,17	0,33	0,29	0,25	0,15	0,19*	—0,15*

* f' est négatif.

$$\omega_1 = \frac{32}{u^4} \cdot \frac{\Sigma W_p}{f'}, \quad \omega_2 = \frac{128}{u^6} \cdot \frac{\Sigma W_2}{f'}, \quad c = \frac{8}{u'^2} \cdot OSC', \quad P_0 = \frac{2}{e^2 f'} \cdot P$$

coup plus compliqué qu'un calcul de la position des images de la pupille. Mais nous croyons que cette petite étude que nous avons faite montre que l'on peut obtenir des objectifs de microscope avec une bonne qualité d'image, c'est-à-dire avec l'obturation et les aberrations inférieures à leurs tolérances.

VI. — Systèmes catadioptriques

Nous avons montré que le dilemme de l'objectif à miroirs, c'est-à-dire le fait que, avec deux miroirs, on a soit une obturation trop grande, soit des aberrations trop fortes, est résolu en employant plus de surfaces ; sous ce rapport, l'obturation ressemble à une aberration.

Comme nous l'avons dit au commencement de cette partie, nous n'avons pas considéré les systèmes catadioptriques, mais seulement les systèmes catoptriques. Bien que les surfaces réfringentes introduisent des aberrations chromatiques, leur emploi en combinaison avec les miroirs peut produire des objectifs très intéressants comme Grey [23, 38, 39] et Blaisse, Bouwers et Bulthuis [35] l'ont montré. Mais il faut rappeler qu'il existe un cas où l'étude est très simple et où les effets chromatiques consistent seulement en une variation de grossissement avec la longueur d'onde ; c'est la lentille d'immersion à incidence normale proposée par Brumberg [40, 41] pour augmenter l'ouverture numérique et dont nous nous sommes déjà servi [25]. On peut également mettre une telle lentille sur une image intermédiaire pour modifier les aberrations extra-axiales.

Finalement, si l'on utilise une lamelle couvre-objet sans cette lentille d'immer-

sion, il faut corriger l'aberration chromatique de cette lamelle par une lentille et, ensuite, tenir compte de l'aberration sphérique des deux dans l'équation d'un objectif monocentrique, ainsi que nous l'avons indiqué dans l'article cité.

CONCLUSIONS

Pour terminer ce travail, nous résumerons rapidement les principaux résultats nouveaux que nous y avons établis. Ceux des deux premières parties s'appliquent aux objets-types suivants : point, ligne, mire périodique, disque circulaire. Cependant, dans la première partie, il s'agit des calculs exacts pour un instrument sans aberration, tandis que, dans la deuxième partie, nous avons tenu compte des aberrations. Nous avons déterminé l'intensité centrale qui peut caractériser la qualité en fonction des aberrations et de l'obturation pour les images des objets ci-dessus et nous avons donné des tableaux des coefficients qui interviennent dans ces fonctions pour quelques cas typiques. Pour l'instrument parfait, nous avons calculé aussi la forme générale de l'image dans chaque cas sauf celui d'un disque. Pour le point et pour la ligne, tous ces calculs ont déjà été faits pour la pupille circulaire, mais nos résultats relatifs aux mires et aux disques sont nouveaux, même pour une pupille sans obturation ; ceux qui sont relatifs aux mires sont en accord avec les calculs faits parallèlement par G. Pieuchard.

Nous avons comparé dans chaque cas les effets produits par l'obturation avec ceux dus aux aberrations, ce qui nous a permis de définir les tolérances relatives aux pupilles annulaires. Nous avons démontré que la considération des objets étendus donne un critérium plus rigoureux que ce que l'on trouverait d'après une étude sur l'image du point seulement. Cependant, nous avons établi que l'on peut calculer les tolérances relatives aux objets étendus à partir de l'image du point lumineux.

Dans la quatrième partie, nous avons tenu compte de l'obturation dans les calculs en utilisant des coefficients d'« obturation géométrique » dont nous avons démontré l'utilité dans l'étude des microscopes à miroirs. Les résultats de cette section montrent que l'on ne peut pas obtenir en même temps les aberrations et l'obturation tolérables avec un système à deux miroirs. Un objectif à trois miroirs concentriques n'atteint les tolérances qu'avec difficulté et ceux à quatre miroirs concentriques ne conviennent pas. C'est seulement en utilisant trois ou quatre miroirs non concentriques que l'on peut obtenir des obturations assez petites sans introduire les aberrations.

Nos résultats montrent qu'un microscope composé entièrement de miroirs peut réaliser la meilleure qualité que l'on obtient actuellement avec les systèmes à lentilles et nous espérons que ce travail contribuera au développement de cet instrument qui a actuellement une grande importance en microscopie.

Ce travail a été effectué sous la direction de Mr A. Maréchal auquel je tiens à exprimer ma reconnaissance pour son intérêt et pour ses conseils fructueux ; je remercie aussi Mr P. Fleury pour son accueil à l'Institut d'Optique et pour les bienveillants égards qu'il m'a toujours accordés. J'ai toujours bénéficié de discussions utiles avec la plupart des chercheurs dans les Laboratoires de l'Institut d'Optique, et je remercie particulièrement Mr A. Arnulf, Mr F. Abelès, qui m'a aidé à rédiger ce travail, et Mr G. Pieuchard qui a fait une étude parallèle sur l'instrument sans obturation. Finalement, je suis heureux d'exprimer ma gratitude à l'Organisation des recherches scientifiques et industrielles du Commonwealth d'Australie pour une bourse qui a rendu possible mon séjour à l'Institut d'Optique.

RÉFÉRENCES

- [1] Ch. ANDRÉ, Etude de la diffraction dans les instruments d'optique. Thèse, Paris, 1876.
- [2] H. STRUVE, *Wied. Ann.*, t. **17**, 1882, p. 1008.
- [3] G. C. STEWARD, *Phil. Trans. A*, t. **225**, 1925, p. 131.
- [4] G. C. STEWARD, *The Symmetrical Optical System*, Camb. Univ. Press, 1928.
- [5] P. S. GREY, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **41**, 1951, p. 183.
- [6] P. M. DUFFIEUX, *L'intégrale de Fourier et ses applications à l'Optique*, Imp. Oberthur, Rennes, 1946.
- [7] A. MARÉCHAL, Etude des effets combinés de la diffraction et des aberrations géométriques sur l'image d'un point lumineux, Thèse, Paris, 1947 ; *Rev. Opt.*, t. **27**, 1948, p. 269.
- [8] A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd IV, Optik, Dieterich, Wiesbaden.
- [9] B. R. A. NIJBOER, *The Diffraction Theory of Aberrations*. Thèse, Groningen, 1942 ; *Physica*, t. **10**, 1943, p. 679.
- [10] L. C. MARTIN, *Trans. opt. Soc.*, t. **27**, 1926, p. 249.
- [11] W. H. STEEL, *Rev. Opt.*, t. **31**, 1952, p. 334.
- [12] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Camb. Univ. Press, 1952.
- [13] A. MARÉCHAL & G. PIEUCHARD, *C. R. Ac. Sc.*, t. **229**, 1949, p. 999.
- [14] A. ARNUF, La vision dans les instruments, Ed. *Rev. Opt.*, 1937.
- [15] A. MARÉCHAL, Thèse, Paris, 1947 ; *Rev. Opt.*, t. **26**, 1947, p. 257.
- [16] F. ZERNIKE, *Physica*, t. **1**, 1934, p. 689.
- [17] R. RICHTER, *Zeits. Instrum.*, t. **45**, 1925, p. 1.
- [18] A. E. CONRADY, *Month. Not. R. astro. Soc.*, t. **65**, 1905, p. 594.
- [19] E. JAHNKE & F. EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1948.
- [20] G. LANSRAUX, *Rev. Opt.*, t. **26**, 1947, p. 24.
- [21] K. HAYASHI, *Tafeln der Besselchen, Theta —, Kugel —, und anderer Funktionen*, Julius Springer, Berlin, 1930.
- [22] A. BOUWERS, *Achievements in Optics*, Elsevier, New York, Amsterdam, 1946.
- [23] P. S. GREY, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **39**, 1949, p. 723.
- [24] H. E. DALL, *Jl Brit. astr. Soc.*, t. **48**, 1938, p. 163.
- [25] W. H. STEEL, *Austr. Jl sci. Res. [A]*, t. **4**, 1951, p. 1.
- [26] K. P. NORRIS, W. E. SEEDS & M. H. F. WILKINS, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **41**, 1951, p. 111.
- [27] J. DOLEŠÍ & K. SLONEK, *Czechosl. Jl Physics*, t. **1**, 1952, p. 27.
- [28] R. BARER, *Optical Instruments*, Proc. Lond. Conf. 1950, p. 43, Chapman & Hall, 1951.
- [29] C. R. BURCH, *Proc. phys. Soc.*, t. **59**, 1947, p. 41 et p. 47.
- [30] A. E. CONRADY, *Applied Optics and Optical Design*, Oxford Univ. Press, 1929.
- [31] K. SCHWARZSCHILD, *Theorie der Spiegelteleskop*, Obser. Göttingen, 1905.

- [32] F. DOURNEAU, *Théorie des images optiques*, Ed. *Rev. Opt.*, 1949, p. 173.
- [33] H. H. HOPKINS, *Wave Theory of Aberrations*, Oxford Univ. Press, 1950.
- [34] A. BOUWERS, *Optical Instruments*, Proc. Lond. Conf., 1950, p. 57.
- [35] B. S. BLAISSE, A. BOUWERS & H. W. BULTHUIS, *Appl. sci. Res.* [B], t. **2**, 1952, p. 453.
- [36] W. E. SEEDS & N. H. WILKINS, *Nature*, t. **164**, 1949, p. 228.
- [37] F. D. CRUIKSHANK, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **36**, 1946, p. 13.
- [38] P. S. GREY, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **40**, 1950, p. 283.
- [39] P. S. GREY, *Optical Instruments*, Proc. Lond. Conf., 1950, p. 65.
- [40] E. M. BRUMBERG, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, t. **39**, 1943, p. 486.
- [41] E. M. BRUMBERG, *Nature*, t. **152**, 1943, p. 748.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
SOMMAIRE	3
INTRODUCTION	3
Notations et hypothèses	5
PREMIÈRE PARTIE. — L'instrument parfait	8
I : L'image du point	8
II : Image de la ligne incohérente	12
III : La mire infinie	16
IV : Intensité le long de l'axe	21
V : Images en lumière cohérente	22
DEUXIÈME PARTIE. — L'instrument aberrant	25
I : Image du point	26
II : Image de la ligne	38
III : La mire infinie	44
IV : Images de disques circulaires	55
TROISIÈME PARTIE. — Tolérances pour les instruments à pupilles annulaires ..	61
I : Tolérances théoriques	61
II : Tests-objets	65
III : Étude expérimentale	66
QUATRIÈME PARTIE. — Le microscope à miroirs	70
I : Optique géométrique des systèmes à miroirs	70
II : Objectifs à un miroir	72
III : Objectifs monocentriques	73
IV : Objectif à deux miroirs non concentriques	84
V : Objectifs à 3 ou 4 surfaces	91
VI : Systèmes catadioptriques	95
CONCLUSIONS	96
RÉFÉRENCES	97

1201. — Imprimerie Jouve, 15, rue Racine, Paris. — 9-53

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

Applications des méthodes interférométriques et polarimétriques en radio-astronomie

Vu et approuvé :

Paris, le 3 novembre 1952.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.

